MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI

DR. FAZEKAS FERENC

A. VIII.
TAYLOR-SOROK

ÍRTA

DR. FREY TAMÁS

NEGYEDIK, VÁLTOZATLAN KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

1976

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:

DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS

*

BELSŐ MUNKATÁRSAK:

DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI TANÁR,
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS,
KANDIDÁTUS

*

SZEMLÉLTETÉS:

GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
K 045 333

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1976

A
MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK SOROZAT KÖTETEI

A.

A. I. **Középiskolai matematika** (Ötödik kiadás)
A. II. **Egyváltozós elemi függvények** (Harmadik kiadás)
A. III. **Differenciálszámítás** (Harmadik kiadás)
A. IV. **Határozatlan integrál** (Negyedik kiadás)
A. V*. **Határozott integrál (Első rész)** (Negyedik kiadás)
A. V**. **Határozott integrál (Második rész)** (Második kiadás)
A. VI. **Többváltozós függvények és differenciálásuk** (Negyedik kiadás)
A. VII. **Többváltozós függvények integrálása** (Negyedik kiadás)
A. VIII. **Taylor-sorok** (Negyedik kiadás)
A. IX. **Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek** (Negyedik kiadás)
A. X*. **A logarléc** (Hatodik kiadás)

B.

B. I.–II–II. **Vektoranalízis (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája Skalár-, vektor- és tenzormezők** (Harmadik kiadás)
B. IV. **Komplex függvénytan** (Negyedik kiadás)
B. V. **Numerikus és grafikus közelítő módszerek** (Második kiadás)
B. VI. **Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok** (Harmadik kiadás)
B. VII*. **Közönséges differenciálegyenletek (Első rész)** (Ötödik kiadás)
B. VII**. **Közönséges differenciálegyenletek (Második rész)** (Harmadik kiadás)
B. VIII. **Parciális differenciálegyenletek** (Második kiadás)

C.

C. I. **Operátorszámítás. Speciális függvények** (Második kiadás)
C. II. **Variációszámítás** (Harmadik kiadás)
C. III. **Integrálegyenletek** (Harmadik kiadás)
C. IV. **Mátrixszámítás** (Negyedik kiadás)
C. V. **Valószínűségszámítás** (Harmadik kiadás)
C. VI. **Matematikai összefoglaló** (Harmadik kiadás)
C. VII. **Matematikai programozás** (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk.)

A. VIII.

TAYLOR-SOROK

ÍRTA:
DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI TANÁR,
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

NEGYEDIK, VÁLTOZATLAN KIADÁS

1976

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

A KÖTET KÉZIRATÁT ÁTNÉZTE:
DR. FREUD GÉZA
A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORA

SZAKTANÁCSADÓ VOLT:
DR. HALÁSZ OTTÓ
EGYETEMI DOCENS,
KANDIDÁTUS

© DR. FREY TAMÁS, BUDAPEST, 1955

ISBN 963 17 1073 4
ISBN 963 17 1072 6

KIADÁSÁT
AZ OKTATÁSI MINISZTER
RENDELTE EL

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy, a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő alkalmazott műszaki anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

Munkánk A. és *B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben, a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolódásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzoraink helyeslésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült e rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltérünk.

---

* sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

Az *A. rész füzeteiben*, professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A *B.* és *C. rész füzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökélesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt*, megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is az olvasóktól, hogy e sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból*, sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert igérő — eredetiségre. Természetesen szép számú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. vill. m. kolléga érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről*, mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak*, különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek*, amely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzetet a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint — sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásánál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkről kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg, módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplináját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink, valamint a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958. szeptember 1. A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása, a második kiadás lendületes folytatása mellett. A harmadik kiadás egyrészt olyan hagyományos, de széles körben érdekes tárgyú kötetekkel kezdődött meg, mint az A. I. és A. X., másrészt olyan modern alkalmazási területű és e miatt mindinkább keresetté vált kötetekkel, mint az A. IX., B. IV.

Az utóbbi második kiadások fél éven belüli elfogyása – éppen a matematikai programozás, lineáris algebrai segédeszközeivel, ill. a síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszereivel kapcsolatos bővítés után – kézzel foghatóan bizonyítja a sorozat második kiadásának előszavában kitűzött fejlesztési tervek és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítések helyességét.

E körülmény buzdítás munkaközösségünk részére és megnyugtatás a Kiadó számára is, látván, hogy újabb áldozatai hasznos cél és reális igényeket szolgálnak.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958-óta több újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában NSZK-ban) és nemzetközi fórumon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, ismét kérve ehhez a *Minisztérium*, *a Tankönyvkiadó* és nem utolsósorban műszaki olvasótárborunk buzdító, áldozatkész támogatását.

Budapest, 1964. febr. 15. A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A KÖTET ELSŐ KIADÁSÁHOZ

Műegyetemi oktatásunkban általában nincs elég idő arra, hogy bemutassuk a *Taylor*-sorok egész alkalmazási területét. Ezért a könyv összeállításánál az a szempont vezetett, hogy a sorbafejtés technikájának részletes ismertetése után minél több alkalmazási területet mutathassunk be.

A hatványsorok elméletének részletes ismertetésére oktatásunkban általában csak a második évben, a komplex függvénytannal kapcsolatosan kerül sor. A feladatok egy része a komplex függvénytan ismeretében valóban egyszerűbben oldható meg; ennek ismeretét nem tételezzük fel. Azok a módszerek azonban, melyeket e feladatok valós függvénytani alapon történő megoldásánál kell alkalmazni, lényegesek, s így nem helytelen szerepeltetésük. A lektor tanácsa alapján lábjegyzetben mindenütt utaltam arra, hogy a kérdéses feladat a komplex függvénytan ismeretében egyszerűbben is megoldható.

Megjegyezzük, hogy az első, második és hatodik paragrafus néhány feladatának megoldásánál némi jártassággal kell rendelkezni az általános sorelmélet módszereiben. Ezzel kapcsolatban a sorozat B. VI. kötetének első két paragrafusára utalunk.

E helyütt mondok köszönetet *Freud Gézának*, a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete osztályvezetőjének, aki a kézirat átnézése folyamán számos megjegyzéssel, tanáccsal, néhány érdekes feladattal, jónéhány egyszerűsítő megoldással és a kézirat gondos lektorálásával nagyban emelte a kötet értékét, *Fazekas Ferenc* főszerkesztőnek, aki a példaanyag elrendezésében támogatott, továbbá *Szabó István* tanárnak és *Somogyi Endréné* főiskolai hallgatónak, akik a technikai szerkesztésben nyújtottak segítséget. Köszönet illeti *Gyurcsy Endrét* a szemléltető anyag gondos szerkesztéséért.

Budapest, 1954. szeptember 30. A SZERZŐ

ELŐSZÓ A KÖTET MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

E kötetet az elmúlt 8 év alatt kedvező tapasztalatokkal használták műszaki felsőoktatásunkban, ezért módosítását nem láttam szükségesnek, azt is szem előtt tartva, hogy az új kiadás a következő tanév elejére a hallgatók kezébe kerüljön.

Budapest, 1962. április 10. A SZERZŐ

ELŐSZÓ A KÖTET HARMADIK KIADÁSÁHOZ

Az új kiadás – néhány apró helyreigazítástól eltekintve – megegyezik az előzővel.

Budapest, 1964. júl. 15. A SZERZŐ

TARTALOMJEGYZÉK

1. §. Függvénysorozatok és függvénysorok vizsgálata 11

a) Konvergenciavizsgálatok 11
α) A határ-, illetve összegfüggvény definíciója 11
β) Az egyenletes konvergencia fogalma 13

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

Ad α) ..... 17 β) 18

b) A hatványsorok tulajdonságai 26

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

2. §. A Taylor-sorról általában 31

α) Elnevezések, a Taylor-polinom, ill. Taylor-sor konstrukciója 31
β) A maradéktag alakjai 33
γ) A hatványsorral előállítható függvényekről 34
δ) Az egyértelműségről 34

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

Ad α) ..... 35 β) ..... 40 γ) ..... 42 δ) 48

3. §. A Mac Laurin-, ill. Taylor-sorok számítástechnikája 50

a) A Mac Laurin-sorok előállításáról 50
α) A deriváltak kiszámításával felírt Mac Laurin-sorok 50
β) Egyszerű helyettesítéssel számított Mac Laurin-sorok 50
γ) Differenciálhányados vagy primitív függvény segítségével számított sorok ... 51
δ) Az alapműveletek véges számú ismétlésével számított sorok 51
ε) A nagy átrendezési tétel segítségével számított sorok 52
ζ) Ismert függvénytulajdonságok felhasználása 52
η) Rekurziós formulák, inverz függvények felhasználása 52

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

Ad α) ..... 52 β) ..... 53 γ) ..... 55 δ) ..... 58 ε) 62
ζ) ..... 65 η) 68

b) A Taylor-sorok számítástechnikája 76
α) A közvetlen számítás 76
β) A függvény sajátságainak és ismert Mac Laurin-soroknak felhasználása 76
γ) Áttérés transzformációval 76

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

Ad α) ..... 77 β) ..... 77 γ) 78

4. §. A konvergenciaköz és a hiba vizsgálatának gyakorlati módszerei 80

a) A konvergenciaköz vizsgálata 80
α) A konvergenciatartomány megállapítása maradéktag segítségével 80
β) Konvergenciaköz megállapítása az általános sorelmélet segítségével 80
γ) A konvergenciaköz megállapítása helyettesítés esetén 81

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

Ad α) ..... 81 β) ..... 82 γ) 86

b) A hibabecslésről 88
α) Hibabecslés a maradéktag-formula alapján 88
β) Hibabecslés az általános sorelmélet eredményeinek felhasználásával 88

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

Ad α) ..... 89 β) ..... 93 β_2) 95

5. §. A Taylor-sorok néhány alkalmazási területe 97

a) Alkalmazásuk az integrálszámítással kapcsolatban 97
α) Integrálás sorbafejtéssel 97
β) Konvergenciatartomány megállapítása integrálásnál 97
γ) Hibabecslés sorok integrálásánál 97

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

Ad α) ..... 98 β) ..... 99 γ) 101

b) Gyakorlati alkalmazások 104
α) Transzcendens kifejezések közelítő számítása 104
β) Valamely változó kifejezése implicit függvénykapcsolatból 111
γ) Transzcendens összefüggések pótlása polinomokkal 117
δ) Primitív függvény meghatározása 122
ε) Extrapoláció Taylor-polinommal 132

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

Ad α–ε) 132

c) Vegyes feladatok 136

6. §. Függelék 140

α) Laurent-sorfejtések 140
β) Határértékek megállapítása hatványsorok segítségével 140
γ) A Bernoulli- és Euler-számok alkalmazása 140

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

Ad α) ..... 140 β) ..... 143 γ) 147

Eredménytár 154

1. §. A FÜGGVÉNYSOROZATOK ÉS FÜGGVÉNYSOROK VIZSGÁLATA

a) Konvergenciavizsgálatok

α) A határ-, illetve összegfüggvény definíciója

Sorozatok elemei, illetve sorok tagjai nemcsak numerikusan megadott, hanem bizonyos változótól, illetve változóktól függő mennyiségek is lehetnek. A következőkben a sortagokban, illetve sorozatelemekben szereplő, numerikusan meg nem adott mennyiségeket nem paraméternek, hanem változónak tekintjük, és – minthogy nemcsak a konvergenciaviszonyok, hanem általában a határérték illetve összeg is függ a kérdéses változó(k)tól – e határérték (amelyet most határfüggvénynek), illetve összeg (amelyet összegfüggvénynek nevezünk) *függvénytani* tulajdonságait vizsgáljuk. Elsősorban azonban a legfontosabb definíciókat bocsátjuk előre:

Az

$$\{f_n(x)\}, \text{ illetve } \{g_n(x^{(1)}; x^{(2)}; \ldots; x^{(k)})\}$$

egy-, illetve többváltozós függvénysorozatot az

$$x = x_0, \text{ illetve } x^{(1)} = x_0^{(1)}; x^{(2)} = x_0^{(2)}; \ldots; x^{(k)} = x_0^{(k)}$$

helyen konvergensnek hívjuk, ha az

$$\{f_n(x_0)\}, \text{ illetve } \{g_n(x_0^{(1)}; x_0^{(2)}; \ldots; x_0^{(k)})\}$$

függvényértékek sorozata konvergál (megjegyezzük, hogy ha az adott x_0 helyen a sorozat véges számú eleme nincs értelmezve, akkor ezeket tetszőlegesen választott értékekkel pótolhatjuk); e sorozatok határértékét

$$f(x_0), \text{ illetve } g(x_0^{(1)}; x_0^{(2)}; \ldots; x^{(k)})\text{-}$$

lal jelölve, ezt tekintjük a keresett határfüggvény x_0, illetve $(x_0^{(1)}; x_0^{(2)}; \ldots; x_0^{(h)})$ pontban felvett értékének. Magát a határfüggvényt

$$f(x), \text{ illetve } g(x^{(1)}; x^{(2)}; \ldots; x^{(k)})$$

val jelölve, e függvény értelmezési tartománya mindazon pontok halmaza, amelyekben a függvényértékek sorozata konvergál. Általánosabban fogalmazva tehát, az

$$\{f_n(x)\}, \text{ illetve } \{g_n(x^{(1)}; x^{(2)}; \ldots; x^{(k)})\}$$

függvénysorozat az

$$f(x), \text{ illetve } g(x^{(1)}; x^{(2)} \ldots; x^{(k)}),$$

függvényhez konvergál minden olyan

$$x, \text{ illetve } (x^{(1)}; x^{(2)}; \ldots; x^{(k)})$$

pontban, ahol tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható egy olyan

$$n_0 = n_0(\varepsilon; x), \text{ illetve } n_0 = n_0(\varepsilon; x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)})$$

index, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ illetve } |g_n(x^{(1)}; x^{(2)}; \ldots; x^{(k)}) - g(x^{(1)}; x^{(2)}; \ldots; x^{(k)})| < \varepsilon,$$

hacsak $n > n_0$.

Hangsúlyoznunk kell, hogy adott ε-hoz a határfüggvény értelmezési tartományában az n_0 ún. küszöbindex kiválasztása a helytől is függ általában, nemcsak ε értéktől, azaz a sorozat különböző pontokban általában különböző sebességgel konvergál a határfüggvényhez.

A függvénysorok konvergenciájának, illetve az összegfüggvénynek a definícióját ugyanúgy vezetjük vissza a sor szeleteiből alkotott függvénysorozat konvergenciájának, illetve határfüggvényének definíciójára, mint a numerikus soroknál. Tehát a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_0(x), \text{ illetve } \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x^{(1)}; x^{(2)}; \ldots; x^{(k)})$$

függvénysor n-edik szeletén az

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \text{ illetve } G_n(x^{(1)}; x^{(2)}; \ldots; x^{(k)}) = \sum_{s=0}^{n} g_s(x^{(1)}; x^{(2)}; \ldots; x^{(k)})$$

mennyiséget értjük. A sor azon x, illetve $(x^{(1)}; x^{(2)}; \ldots; x^{(k)})$ pontokban konvergens, ahol az

$$\{F_n(x)\}, \text{ illetve } \{G_n(x^{(1)}; x^{(2)}; \ldots; x^{(k)})\}$$

sorozat, összegfüggvénye pedig e sorozat határfüggvénye.

A *Cauchy*-, illetve a *Cauchy—Bolzano*-féle konvergencia-kritérium* természetesen megfogalmazható függvénysorozatok, illetve függvénysorok esetében is (a következőkben, hacsak lényeges különbség nincs az egy- és a többváltozós függvényekből képezett sorozatok között, csak az egyváltozós esettel foglalkozunk!):

Az $\{f_n(x)\}$ függvénysorozat azon és csakis azon x helyeken konvergál, ahol tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan

$$n_0 = n_0(\varepsilon; x)$$

küszöbindex, hogy

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

ha $n > n_0$, és p tetszőleges természetes szám.

* L. pl. az A. II. kötet 10. §-ában, vagy Bermant: Matematikai analízis I. kötetben.

A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor azon és csakis azon x helyeken konvergens, ahol tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható az

$$n_0 = n_0(\varepsilon; x)$$

küszöbindex úgy, hogy tetszőleges p természetes szám mellett fennáll, hogy

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon,$$

ha már $n > n_0$. (Itt tehát n_0-t az ε és x ismeretében, ezektől függően, de p-től függetlenül kell megadni tudnunk!)

A konvergenciatartomány olyan résztartományaiban, ahol a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

függvénysor tagjai — véges számú tagtól eltekintve — azonos előjelűek, természetesen alkalmazhatók a pozitív tagú sorokra kimondott konvergencia, illetve divergencia-kritériumok. A sorozatokra, ill. sorokra vonatkozó műveleti szabályok (részletesen a B. VI. kötetben tárgyaljuk) a definícióból következően függvénysorozatokra, illetve sorokra is érvényesek.

Az abszolút konvergenciának — ugyancsak a definíciókból következően — függvénysoroknál is ugyanaz a jelentősége, mint a numerikus soroknál. A konvergencia fenti definíciójából következik az is, hogy a függvénysorozatok, illetve függvénysorok határ-, illetve összegfüggvényüket a konvergenciatartományban egyértelműen határozzák meg.

β) Az egyenletes konvergencia fogalma

Természetszerűen vetődik fel az a kérdés, hogy milyen feltételek mellett rendelkezik a határ-, illetve összegfüggvény azokkal a függvénytani tulajdonságokkal, amelyekkel a sorozat valamennyi eleme, illetve a sor valamennyi tagja (esetleg véges számú kivételtől eltekintve) rendelkezik? Mivel ezek a tulajdonságok általában a független változóban elvégzett határátmenettel kapcsolatosak, az előbbi kérdés lényegében így is megfogalmazható:

Milyen feltételek mellett cserélhető fel egymással a független változóban elvégzett és a sorozatban, illetve sorban (ti. az elemek, illetve szeletek indexében) elvégzett határátmenetek sorrendje?

A feladatok között néhány példával illusztráljuk, hogy ehhez a konvergencia, sőt még az abszolút konvergencia sem elég; így pl. valamely x_0 helyen folytonos függvények sorozata, amely az x_0 helyen és ennek környezetében mindenütt konvergál (sőt esetleg abszolút is konvergál), nem tart szükségképp (az x_0 helyen) folytonos határfüggvényhez stb. Könnyen belátható, hogy ezt elsősorban az a tény okozza, hogy különböző helyeken különböző sebességgel konvergál esetleg ugyanaz a sorozat, illetve sor; így pl. a folytonossággal kapcsolatban így okoskodhatunk: Az x_0 helyen folytonos függvény x_0 pontban felvett és valamely elég közeli x_1 pontban felvett függvényértéke csak nagyon keveset különbözhet egymástól. Ha tehát az $\{f_n(x)\}$ függvénysorozat elemei az x_0 pontban folytonosak, akkor kiválasztva egy elég nagy n indexet és az x_0-hoz elég közeli x_1 helyet, az

$$f_n(x_0) \text{ és az } f_n(x_1)$$

függvényértékek csak „nagyon keveset" különböznek egymástól. Ha azonban nagyon erősen eltér az adott függvénysorozat konvergenciájának sebessége az x_0 és az x_1 pontban, pl. x_0-ban relatíve „nagyon gyors" x_1-hez képest, akkor az $f(x_0)$ határfüggvény-érték (megfelelő n index mellett) már csak nagyon kevéssé tér el az $f_n(x_0)$ értéktől, de az $f(x_1)$ érték „erősen eltér" a relatíve lassú konvergencia miatt az $f_n(x_1)$ értéktől. Ebből azonban az következik, hogy $f(x_0)$, $f_n(x_0)$ és $f_n(x_1)$ „egymáshoz közel" vannak, míg $f(x_1)$ mindhármójuktól erősen eltér, s így esetleg az $f(x)$ határfüggvény már nem folytonos az x_0 pontban.*

Ez az oka annak, hogy egy új konvergenciafogalmat, az ún. egyenletes konvergencia fogalmát is bevezetjük:

Tekintsük az $\{f_n(x)\}$ függvénysorozatot és a konvergenciatartomány valamely tetszőleges résztartományát, amelyet jelöljünk R-rel (ez az R lehet pl. az $a \leqq x \leqq b$ zárt, vagy az $a < x < b$ nyílt intervallum vagy akár a pontoknak egy tetszőleges halmaza). Jelöljük a határfüggvényt $f(x)$-szel. *Az* $\{f_n(x)\}$ *függvénysorozatot akkor* mondjuk az R tartományban *egyenletesen konvergensnek, ha tetszőleges* $\varepsilon > 0$ számhoz — *a helytől függetlenül — megadható egy olyan*

$$N_0 = N_0(\varepsilon)$$

küszöbindex, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

ha $n > N_0$, éspedig *bármely* x *értékre az* R *tartományból.* Ez más szóval azt jelenti, hogy az adott ε-hoz és az R tartomány egyes x helyeihez tartozó (az α) részben definiált) $n_0(\varepsilon; x)$ küszöbszámok halmazának van felső korlátja; pl. $N_0 = N_0(\varepsilon)$ ilyen felső korlát.

Nagyon lényeges az egyenletes konvergenciának a *Cauchy*-, illetve a *Cauchy — Bolzano*-kritériumhoz adaptált alakja:

Az $\{f_n(x)\}$ függvénysorozat, illetve a $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ függvénysor az R tartományban akkor és csak akkor konvergál egyenletesen, ha bármely $\varepsilon > 0$ mennyiséghez található olyan $N_0 = N_0(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

illetve

$$|g_n(x) + g_{n+1}(x) + \ldots + g_{n+p}(x)| = \left| \sum_{k=n}^{n+p} g_k(x) \right| < \varepsilon,$$

hacsak

$$n > N_0(\varepsilon),$$

éspedig bármilyen p természetes számra és az R tartomány bármely x pontjában. (Tehát az N_0 küszöbszám, amely általában nemcsak ε-tól, hanem az x helytől is függ — l. a 10. oldalon az általánosabb definíciót —, itt csak ε-tól függhet, x-től nem, azaz „egyenletesen az egész tartományban" megfelelőnek kell lennie!)

Van egy nagyon egyszerű és jól használható elégséges kritériumunk, amellyel végtelen sorok egyenletes konvergenciájáról meggyőződhetünk (az ellenkezőjéről persze nem, hiszen a kritérium csak elégséges):

* Ez a gondolatmenet természetesen nagyon felületes, nem pótolhatja a szigorú bizonyítást. Megjegyezzük azonban, hogy a kérdéses bizonyítás gondolatmenete hasonlít az ittenihez.

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ függvénysor tagjai minden, az R tartományba eső x helyen kisebbek abszolút értékben egy konvergens numerikus $\sum_{n=0}^{\infty} G_n$ sor azonos indexű tagjánál (legfeljebb véges számú kivétellel), azaz fennáll, hogy

$$|g_n(x)| \leqq G_n$$

n minden értékére (legfeljebb véges számú kivétellel) és minden R tartománybeli x-helyre, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ sor R-ben egyenletesen konvergens (*Weierstrass-féle* kritérium).

A feladatok között gyakran támaszkodunk majd a következő alapvető tételekre:

1. Legyen az $\{f_n(x)\}$ függvénysorozat, illetve a $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ függvénysor minden

eleme, illetve tagja $\begin{cases} \text{folytonos,} \\ \text{jobbról folytonos,} \\ \text{balról folytonos}^* \end{cases}$

az x_0 pontban. Ha x_0 az egyenletes konvergencia tartományának egy belső pontja — pl. a függvénysorozat, illetve -sor az $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ intervallumban ($\varepsilon > 0$, tetszőleges) egyenletesen konvergens — akkor a határ, illetve összegfüggvény

az x_0 helyen $\begin{cases} \text{folytonos,} \\ \text{jobbról folytonos,} \\ \text{balról folytonos.} \end{cases}$

Jelekben ezt legegyszerűbben úgy fejezhetjük ki, hogy az „x-ben és az n-ben végzett határátmenetek felcserélhetők", azaz pl.:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

illetve

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0} g_n(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \lim_{x\to x_0} G(x) = G(x_0),$$

Megjegyezzük, hogy a tétel feltételei elégségesek, de nem szükségesek.

2. Ha az $\{f_n(x)\}$ függvénysorozat elemei, illetve a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ sor tagjai valamennyien integrálhatók az $a \leqq x \leqq b$ intervallumon, és az $[a, b]$ intervallum teljes egészében benne van a sorozat, illetve sor egyenletes konvergenciatartományában, akkor a határ, illetve az összegfüggvény is integrálható $a \leqq x \leqq b$-ben; ha továbbá

* L. a sorozat A. II. kötetében, a 10. §-ban.

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ az $a \leqq x \leqq b$ egy tetszőleges részintervalluma, akkor a határ-, illetve összegfüggvény $[\alpha, \beta]$-n vett integrálja egyenlő az elemek, illetve tagok $[\alpha, \beta]$-n vett integráljából képezett sorozat, illetve sor határértékével, illetve összegével. Jelekben:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(\xi)\,d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} [\lim_{n\to\infty} f_n(\xi)]\,d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi)\,d\xi,$$

illetve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} g_n(\xi)\,d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\xi)\right] d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} G(\xi)\,d\xi,$$

vagy hogy itt is kiemelkedjék az a tény, hogy két határátmenet sorrendjét cserélhettük fel:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_i f_n(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_i [\lim_{n\to\infty} f_n(\xi_i)]\,\Delta x_i,$$

illetve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\lim_{\max|\Delta x_i|=0} \sum_i g_k(\xi_i)\,\Delta x_i \right) = \lim_{\max|\Delta x_i|=0} \sum_i \left[\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g_k(\xi_i) \right] \Delta x_i.$$

3. Ha az $\{F_n(x)\}$ függvénysorozat elemei, illetve a $\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)$ függvénysor minden tagja differenciálható az $a \leqq x \leqq b$ intervallum minden pontjában, és a deriváltfüggvényekből álló $\left\{\frac{dF_n(x)}{dx}\right\}$ függvénysorozat, illetve $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dG_n(x)}{dx}$ sor egyenletesen konvergál az $a \leqq x \leqq b$ (zárt !) intervallumon, továbbá az eredeti sorozat, illetve sor az $[a, b]$ intervallumnak legalább egy $x = x_0$ pontjában konvergens, akkor

a) az $\{F_n(x)\}$ függvénysorozat, illetve a $\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)$ függvénysor az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban egyenletesen konvergál;

b) az $F(x)$ határ-, illetve a $G(x)$ összegfüggvény az $a < x < b$ (nyílt) intervallum minden pontjában differenciálható, sőt még az $x = a$ helyen is differenciálható jobbról, illetve az $x = b$ helyen balról;

c) a határ-, illetve az összegfüggvény deriváltja egyenlő a deriváltfüggvények határ-, illetve összegfüggvényével.

Jelekben:

Ha $a \leqq x_0 \leqq b$ mellett

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x_0) = F(x_0), \text{ illetve } \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x_0) = G(x_0),$$

és

$$\left\{\frac{dF_n(x)}{dx}\right\} \Rightarrow f(x), \text{ illetve } \sum_{k=0}^{n} \frac{dG_k(x)}{dx} \Rightarrow g(x)$$

az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban ($\Rightarrow$ jelöli azt, hogy a sorozat egyenletesen konvergál a határfüggvényhez), akkor

$$\{F_n(x)\} \Rightarrow F(x), \text{ illetve } \sum_{k=0}^{n} G_k(x) \Rightarrow G(x),$$

ha $a \leqq x \leqq b$, és

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} F_n(x)\right) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{dF_n(x)}{dx},$$

ha $a < x < b$, továbbá

$$F'_+(a) = f_+(a); \quad F'_-(b) = f_-(b)$$

($F'_+(a)$ jelenti $\frac{dF(x)}{dx}$ jobbról vett deriváltját, $f_+(a)$ pedig $f(x)$ jobbról vett határértékét az $x = a$ helyen), illetve:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) = \frac{d}{dx}G(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{dG_n(x)}{dx},$$

ha $a < x < b$, és

$$G'_+(a) = g_+(a); \quad G'_-(b) = g_-(b).$$

Ha olyan alakot akarunk adni képletünknek, amelyből a két határátmenet sorrendjének felcserélése leolvasható, ezt írhatjuk:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left[\lim_{n\to\infty} F_n(x)\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta F_n(x)}{\Delta x} = \lim_{n\to\infty}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F_n(x)}{\Delta x} = \lim_{n\to\infty}\frac{dF_n(x)}{dx}.$$

Példák és feladatok

α | **1.** Mi a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

sor konvergenciatartománya, illetve abszolút konvergencia tartománya?

Megoldás: Először nyilván az abszolút konvergencia tartományát keressük meg, azután nézzük meg, hogy a „hiányzó részeken" nem feltételesen konvergens-e a sor. Tekintsük tehát a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x^n|}{|(x+1)(x+2)\ldots(x+n)|}$$

sort. Ez x minden értékénél pozitív tagú sor (kivéve, ha x egy negatív egész számmal egyenlő, mert akkor a sornak végtelen sok tagja nincs értelmezve; hacsak véges

sok taggal lenne baj, az – a definíció szerint – nem akadályozza a vizsgálatot), alkalmazható tehát bármelyik konvergenciakritérium. Így pl.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x^{n+1}|}{|(x+1)(x+2)\dots(x+n)(x+n+1)|} : \frac{|x^n|}{|(x+1)(x+2)\dots(x+n)|} =$$

$$= \frac{|x|}{|x+n+1|}.$$

Ha tehát már

$$n \geqq 3\,|x|,$$

akkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{|x+n+1|} \leqq \frac{|x|}{|n+1|-|x|} \leqq \frac{|x|}{|3|x|+1-|x||} =$$

$$= \frac{|x|}{2|x|+1} < \frac{1}{2} < 1,$$

azaz a sor x minden értékére (kivéve a negatív egész számokat) abszolút konvergens. Ebben a példában tehát feltételes konvergenciatartományt nem kell keresnünk, mert ilyen nem lehet.

2. Mi a konvergenciatartománya, illetve az abszolút konvergencia tartománya a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{x^2(x+1)^2\dots(x+n)^2}$$

sornak?

3. Mi a konvergenciatartománya, illetve az abszolút konvergencia tartománya a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n^2}$$

sornak?

β **1.** Legyen

$$\{s_n(x)\} = \left\{\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\right\}.$$

a) Mi a határfüggvény értelmezési tartománya?
b) Ábrázoljuk a határfüggvényt!
c) Mutassuk meg, hogy az „elemek" folytonosak az $x = 1$ helyen, a határfüggvény nem.

Az előző példa egyben azt is mutatja, hogy míg az „elemek" differenciálhatók az $x = 1$ helyen, addig a határfüggvény nem.

2. Legyen

$$\{f_n(x)\} = \left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}.$$

a) Határozzuk meg a konvergenciatartományt, és ábrázoljuk a határfüggvényt.
b) Ábrázoljuk $f_2(x)$-et, $f_{10}(x)$-et és $f_{20}(x)$-et.
c) Legyen $\varepsilon = 10^{-4}$; $n_0 = 10^3 - 1$, illetve $10^5 - 1$, illetve $10^{10} - 1$.

Határozzuk meg azon x helyeket a $0 \leqq x \leqq 1$ számközben, ahol

$$|d_n(x)| > \varepsilon, \quad \text{jóllehet} \quad n = n_0 + 1 = 10^3,$$
$$|d_n(x)| > \varepsilon, \quad \text{jóllehet} \quad n = n_0^* + 1 = 10^5,$$
$$|d_n(x)| > \varepsilon, \quad \text{jóllehet} \quad n = n_0^{**} + 1 = 10^{10}.$$

Itt $d_n(x)$ jelenti a határfüggvény és a függvénysorozat n-edik eleme közötti eltérést, azaz

$$d_n(x) = f(x) - f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) - f_n(x).$$

d) Adjuk meg a fenti sorozat egyenletes konvergenciájának tartományát.
e) Keressünk az $1 \leqq x \leqq 2$ intervallumban olyan helyeket, ahol:

$$|d_n(x)| > 10^{-1}; \quad n = n_0 + 1 = 10^3,$$

illetve

$$|d_n(x)| > 10^{-1}; \quad n = n_0^* + 1 = 10^5,$$

illetve

$$|d_n(x)| > 10^{-1}; \quad n = n_0^{**} + 1 = 10^{10}.$$

3. Legyen

$$\{f_n(x)\} = \left\{1 + \frac{1}{nx^2 + 1}\right\}.$$

a) Mi a konvergenciatartomány?
b) Ábrázoljuk a határfüggvényt, $f_{10}(x)$-et, $f_{40}(x)$-et és $f_{100}(x)$-et.
c) Adjuk meg azon x értékek tartományát, ahol $|d_n(x)| > 10^{-2}$, ha $n = n_0 + 1 = 10^{12}$.
d) Adjuk meg fenti sorozat egyenletes konvergenciájának tartományát.

4. Állapítsuk meg, hogy milyen tartományokban egyenletesen konvergens az

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)};$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{x^2(x+1)^2\ldots(x+n)^2}$$

sor?

5. Mutassuk ki, hogy az

$$\{f_n(x)\} = \{nxe^{-nx^2}\}$$

függvénysorozat nem egyenletesen konvergens a $0 \leqq x \leqq 1$ tartományban.

6. Egyenletesen konvergens-e az

$$\frac{x}{1+x}+\frac{x}{(1+x)(1+2x)}+\ldots+\frac{x}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)}+\ldots$$

függvénysor a $0 \leqq x \leqq 1$ intervallumban?

7. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

függvénysor tagjai ne legyenek az $[a, b]$ tartományban abszolút értékben nagyobbak a konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n$$

sor azonos indexű tagjánál, azaz

$$|g_n(x)| \leqq G_n, \quad \text{ha} \quad a \leqq x \leqq b.$$

Igazoljuk, hogy ekkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

függvénysor az $[a, b]$ intervallumban egyenletesen konvergens. (*Weierstrass*-féle kritérium.)*

8. Fogalmazzuk meg és igazoljuk a *Weierstrass*-kritériumnak megfelelő kritériumot az $\{f_n(x)\}$ függvénysorozatra vonatkozóan.

9. Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ sor egyenletesen konvergens!

Megoldás: Ismeretes, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens (L. pl. a sorozat B. VI. kötetét.) Mivel pedig $|\sin nx| \leqq 1$, a *Weierstrass*-kritérium értelmében sorunk az egész számegyenesen egyenletesen konvergens.

10. Tekintsük az

$$\{f_n(x)\} = \{2n^2 x e^{-n^2x^2}\}$$

függvénysorozatot. Határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx, \quad \text{illetve az} \quad \int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\,dx$$

értéket. Miért nem egyenlők ezek?

11. Határozzuk meg az

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

* L. pl. Szász Pál: Differenciál- és integrálszámítás c. könyvét. I. kötet, 641. o.

összegfüggvény tagonkénti (formális) differenciálásából származó sor értékét az $x = 0$ helyen. Hogyan lehetséges, hogy nem konvergens a kapott sor az $x = 0$ helyen, holott az eredeti sor egyenletesen konvergens, és folytonos differenciálhányadosa van minden tagjának?

12. Milyen tartományban konvergál egyenletesen a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n^{3/2}}$$

sor?

13. Milyen tartományban konvergálnak egyenletesen az alábbi sorok:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \ln^2(1+x^n); \qquad c) \sum_{n=0}^{\infty} \sin^2 x^n$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} \ln(1+x^n); \qquad d) \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\sin x^n}\,.$$

14. Milyen intervallumban konvergálnak egyenletesen az alábbi sorok:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x^2}{n^3}; \qquad f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right);$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \operatorname{tg} \frac{x}{5^n}; \qquad g) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{x}{n^2} - \sin \frac{x}{n^2}\right);$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{x}{n^{2/3}}; \qquad h) \sum_{n=3}^{\infty} \ln \cos \frac{x}{n^2};$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt[3]{1+x^n} - 1\right]; \qquad i) \sum_{n=3}^{\infty} \ln \cos \frac{x}{n}.$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \sqrt{1+x^n}}{1 - \sqrt{1+(2x)^n}};$$

15. Az $x \geqq 0$ félegyenes mely intervallumán egyenletes a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{[1+(n+1)x]\,[1+(n+4)x]}$$

sor konvergenciája?

16. Igazoljuk, hogy ha a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$$

sor konvergens, akkor a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x \quad \text{és} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu x$$

sorok a $-\infty \leqq x \leqq \infty$ intervallumban egyenletesen konvergensek.

17. Határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

határfüggvényt; honnét következik, hogy egyetlen, az $x = 1$ helyet is tartalmazó intervallumban sem lehet egyenletesen konvergens a sorozat? Mi az egyenletes konvergencia tartománya?

Megoldás:

Ha $|x| < 1$, akkor $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \to \dfrac{0}{1+0} = 0$,

minthogy a határmenet az alapműveletekkel sorrendre felcserélhető.

$x = 1$ esetén a sorozat minden tagja, s így a határérték is $\dfrac{1}{2}$-del egyenlő.

$x = -1$ esetén divergens a sorozat $\left(\text{felváltva a } -\dfrac{1}{2} \text{ és } \dfrac{1}{2} \text{ értéket veszi fel}\right)$.

$$|x| > 1 \text{ esetén } f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{1}{x^{-n}+x^n} < \varepsilon,$$

ha n elég nagy, tehát ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Egyetlen, az $x = 1$ helyet tartalmazó intervallumban sem lehet egyenletes a konvergencia, mert a sorozat elemei mindenütt folytonos függvények, a határfüggvény azonban az $x = 1$ helyen szakadást szenved.

Igen könnyen belátható már az eddigiekből is, hogy a

$$-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$$

($\varepsilon > 0$: tetszés szerintien kicsiny szám) és a

$$-\infty < x \leqq -1-\varepsilon, \text{ továbbá az } 1+\varepsilon \leqq x < \infty$$

intervallumokban a konvergencia egyenletes. A maradékfüggvény ugyanis:

$$r_n(x) = f_n(x) - 0 = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

ezekben a tartományokban könnyen majorálható egy-egy numerikus sorozattal, pl. az $|x| \leqq 1-\varepsilon$ tartományban

$$|r_n(x)| < (1-\varepsilon)^n \Rightarrow 0;$$

az $|x| > 1+\varepsilon$ tartományban hasonlóan:

$$|r_n(x)| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \Rightarrow 0.$$

18. Igazoljuk, hogy a

$$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s} - \frac{1}{s-1} \quad ^* \text{ jelöléssel } \zeta(s) \to C, \text{ ha } s \to 1+0.$$

$\left(C \text{ az } \textit{Euler}\text{-állandó; } C = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right\}. \text{ L. pl. a B. VI. kötet 2. §-át} \right).$

Megoldás:

$\zeta(s)$ így is előállítható, ha $s > 1$: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} \right]$,

hiszen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}, \text{ ha } s > 1.$$

Másrészt $s > 1$ esetén a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

sor is (abszolút) konvergens, két konvergens sor különbsége pedig a tagok különbségének soraként írható fel.

Ha $f(s)$ utóbbi alakjában az $1 \leqq s < \infty$ intervallumban egyenletesen konvergens, akkor a szummáció határmenete, ti.:

$$\zeta(s) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} \right],$$

felcserélhető az $s \to 1+0$ határátmenettel. Mivel pedig

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \right] = C$$

(épp C definíciója volt ez), az állítást igazoltuk, ha az egyenletes konvergenciát igazoltuk.

---

* Ez az ún. *Riemann*-féle *zetafüggvény*.

A $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^s}-\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^s}\right]$ sor azonban valamilyen véges n_0-tól tagonként majorálható $s \geqq 1$ esetben az előbbi (s-től független) numerikus sorral. Ugyanis $\frac{1}{n_0}-\int_{n_0}^{n_0+1}\frac{dx}{x}$ – a numerikus sor n_0-adik tagja – nagyobb (vagy legfeljebb egyenlő), mint a függvénysor n_0-adik tagja:

$$\frac{1}{n_0^s}-\int_{n_0}^{n_0+1}\frac{dx}{x^s} \qquad (s \geqq 1),$$

ahogy ezt kis számolással igazolhatjuk. Ezek szerint jogos a határátmenetek felcserélése: $s = 1$ az egyenletes konvergencia tartományban van. Tehát:

$$\lim_{s\to 1+0}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^s}-\frac{1}{s-1}=\lim_{s\to 1+0}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{n^s}-\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^s}\right]=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}\right]=C;\ \text{q. e. d.}$$

19. Határozzuk meg az

$$\{y_n\}=\{(1-x^n)\,x^n\}$$

sorozat általános tagja maximumának helyét és értékét a $-1 \leqq x \leqq 1$ intervallumban. Határozzuk meg a határfüggvényt!

Egyenletes-e a konvergencia a

$$-1 \leqq x \leqq 1$$

intervallumban?

20. Felcserélhető-e a

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{N\to\infty} x\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(x+n^2)^2}$$

kifejezésben a két határmenet sorrendje?

Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{N\to\infty} x\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(x+n^2)^2};$$

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{x\to\infty} x\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(x+n^2)^2};$$

$$\lim_{N,\,x\to\infty;\ N=[x]} x\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(x+n^2)^2}$$

és a

$$\lim_{N,\, x\to\infty;\ N=[x^2]} x \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(x+n^2)^2}$$

határértékeket!

21. Legyen az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

függvénysor az $a \leqq x \leqq b$ tartományban egyenletesen konvergens, a $g(x)$ függvény pedig ugyanott korlátos. Igazoljuk, hogy ekkor az $[a, b]$ intervallumon egyenletesen konvergens a

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(x) f_n(x) \text{ sor is, és összege } \sum_{n=0}^{\infty} g(x) f_n(x) = g(x) \cdot f(x) \quad (a \leqq x \leqq b).$$

22. Az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \text{ és a } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$$

függvénysorok egyenletesen konvergensek az $a \leqq x \leqq b$ intervallumon.

Igazoljuk, hogy ugyanitt egyenletesen konvergens a

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)]$$

sor is (α, β tetszőleges valós számok), és

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)] = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

23. Tekintsük az $[a, b]$ intervallumon egyenletesen konvergens $\{a_n(x)\}$ és $\{b_n(x)\}$ sorozatokat. Igazoljuk, hogy $[a, b]$-n egyenletesen konvergál az $\{a_n(x) \cdot b_n(x)\}$ függvénysorozat is, és $\lim_{n\to\infty} a_n(x) \cdot b_n(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x) \cdot \lim_{n\to\infty} b_n(x)$.

24. Megtartva az 1. § *a)* 22. feladat jelöléseit, tegyük fel, hogy az $a < \alpha \leqq x \leqq \beta < b$ jelöléssel az $[\alpha, \beta]$ intervallum minden pontjában a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ és $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ függvénysorok közül legalább az egyik abszolút konvergens. Igazoljuk, hogy a két sor *Cauchy*-féle szorzata egyenletesen konvergál az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, és összegfüggvénye $f(x) \cdot g(x)$-szel egyenlő.

b) A hatványsorok tulajdonságai

Az analízisben leggyakrabban előforduló, legfontosabb s egyszersmind legegyszerűbb tulajdonságokkal rendelkező sorok a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ illetve } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

alakú, ún. hatványsorok. A konvergenciatartományt hatványsorok esetében konvergenciaköznek szoktuk nevezni (hogy miért, az az első feladat alapján azonnal érthető), és az első alakban az origó, a második alakban az $x = x_0$ pont a konvergenciaköz középpontja. A két alak tulajdonságai persze azonosak, mert a

$$z = x - x_0$$

lineáris transzformációval a konvergenciaköz középpontja mindig az origóba vihető ki és viszont.

A hatványsorokra vonatkozó tételek egyszerű következményei az 1. § *a)* részben megismert tételeknek, így azokat nem emeljük itt ki, *Abel* tételét kivéve:

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciaközének sugarát jelöljük r_0-lal, összegfüggvényét pedig $f(x)$-szel. Minthogy a hatványsorok konvergenciaközük bármely belső, zárt részintervallumán egyenletesen konvergensek, azért $f(x)$ minden olyan x_0 pontban folytonos, amely a konvergenciaköz belső pontja, vagyis amelyre $|x_0| < r_0$. Tegyük fel, hogy *a hatványsor* még az $x = r_0$, illetve az $x = -r_0$ *pontban is konvergens*, azaz értelmezett az

$$f(r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r_0^n, \text{ illetve } f(-r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n r_0^n$$

mennyiség is. *Abel* tétele szerint ekkor az $f(x)$ *függvény az* $x = r_0$, *illetve az* $x = -r_0$ *pontban is folytonos* (balról, illetve jobbról), azaz

$$f(r_0) = \lim_{x \to r_0 - 0} f(x), \text{ illetve } f(-r_0) = \lim_{x \to -r_0 + 0} f(x).$$

(A tétel bizonyítása megtalálható pl. Szász Pál: Differenciál és integrálszámítás c. könyvében. I. 624. o.)

Példák és feladatok

1. Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sor az $x = x_0$ értéknél konvergens, az $x = x_1$ helyen pedig divergens (sőt elegendő, ha az $x = x_0$ helyen az $\{f_n(x)\} = \{a_n x^n\}$ sorozat korlátos marad), akkor minden olyan $x = x_2$ helyen abszolút konvergens e sor, amelyre $|x_2| < |x_0|$, minden olyan $x = x_3$ helyen pedig, ahol $|x_3| > |x_1|$, divergens a hatványsor.

E feladat korollárriuma, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alakú *hatványsorok egy olyan intervallumban konvergensek, amelynek felezőpontja az origó. A tartomány belsejében abszolút konvergensek.* Az intervallum bal-, illetve jobboldali határpontján minden eset előfordul: lehet, hogy a hatványsor egyik pontban sem konvergál, mindkettőben feltételesen, esetleg abszolút konvergens. Lehet az is, hogy az egyik perempontban nem konvergál, a másikban feltételesen konvergens stb. Erre általános szabály nincs.

A konvergenciatartományt hatványsoroknál *konvergenciaköz*nek szoktuk hívni, és a „sugarát" – az origónak a perempontok egyikétől való távolságát – szoktuk megadni.

2. Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alakú *hatványsor konvergenciaközének bármely belső (zárt* vagy nyílt) *részintervallumában egyenletesen konvergál.* Ha tehát a hatványsor konvergenciaközének sugarát r-rel jelöljük, $\varepsilon_1 > 0$ és $\varepsilon_2 > 0$ pedig tetszőleges számok, akkor a hatványsor a

$$-r + \varepsilon_1 \leqq x \leqq r - \varepsilon_2$$

intervallumon egyenletesen konvergens.

3. Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciaközének r sugarára érvényesek a következő relációk:

$$a)\ r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{(ha e határérték létezik)}$$

$$b)\ r = \varliminf \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{(Cauchy–Hadamard képlet)}$$

$$c)\ r \geqq \varliminf \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

Útbaigazítás Ad *a)* Az 1. § *b)* 1. feladatában láttuk, hogy a konvergenciaköz bármely belső pontjában abszolút konvergens a hatványsor. Elegendő tehát azon intervallum meghatározása, amelynek belsejében a hatványsor abszolút konvergens, de amelyen kívül már egyetlen pontban sem konvergál (sem abszolút, sem feltételesen) a hatványsor; az intervallum hossza ekkor épp a keresett sugár kétszerese. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\ |x|^n$$

pozitív tagú sor konvergenciatartományát keressük tehát. Alkalmazzuk a hányadoskritériumot:

$$\frac{|a_{n+1}|\ |x|^{n+1}}{|a_n|\ |x|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\ |x|.$$

Tegyük fel, hogy az $\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\}$ sorozatnak van határértéke, amelyet $\frac{1}{r}$-rel jelölünk. Ha $|x| < r$, akkor található olyan $N = N(\varepsilon)$ index, amelyen túl már

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_1|}|x| \leqq 1-\varepsilon < 1 \,(n \geqq N)$$

feltéve, hogy $0 < \varepsilon < \frac{r-|x|}{2r}$. Az $\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\}$ sorozat ugyanis $\frac{1}{r}$-hez konvergál, található tehát olyan N index, amelyen túl már

$$\left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - \frac{1}{r}\right| \leqq \frac{r-|x|}{2r\,|x|},$$

azaz

$$\left|\frac{|a_{n+1}|}{a_n}\right| \leqq \frac{1}{r} + \frac{r-|x|}{2r\,|x|}, \text{ hacsak } n \geqq N.$$

Ekkor azonban

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| \leqq \left[\frac{1}{r} + \frac{r-|x|}{2r\,|x|}\right]|x| = \frac{|x|}{r} + \frac{r-|x|}{2r} =$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{r-|x|}{r} + \frac{r-|x|}{2r} = 1 - \frac{r-|x|}{2r} < 1-\varepsilon.$$

A hányadoskritérium szerint tehát minden $|x| < r$ esetben abszolút konvergál a sor. Ugyanígy belátható, hogy $|x| > r$ esetben nem konvergálhat az abszolút értékekből álló sor. Ebből már következik az *a)* alatti állítás.

Ad *b)*. (L. pl. *Beke Manó:* Differenciál- és integrálszámítás II. 346–349. o.). Megjegyezzük, hogy az *a)* alatt bemutatott módon a gyökkritériumot, pontosabban annak élesebb alakját felhasználva, amely szerint a pozitív tagú $\sum b_n$ sor konvergál, ha $\overline{\lim}\sqrt[n]{b_n} < 1$, de divergál, ha $\overline{\lim}\sqrt[n]{b_n} > 1$ (l. pl. a B. VI. kötet 2. §-át) – könnyen igazolható az állítás.

Ad *c)*. A *b)* alatti eredményből – vagy akár az *a)* alatti gondolatmenetet alkalmazva is – azonnal következik az állítás, ha felhasználjuk a

$$\underline{\lim}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqq \underline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \leqq \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \leqq \overline{\lim}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

relációt (l. pl. a B. VI. kötet 1. § *d)* pontját.)

4. Mutassuk ki, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsornak és az ebből formális tagonkénti differenciálással származtatható

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

hatványsornak ugyanaz a konvergenciaköze, más szóval a két hatványsor konvergenciasugara egyenlő egymással.

5. Jelöljük az $r > 0$ konvergenciasugárral rendelkező

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

hatványsor összegfüggvényét (amely tehát a $-r < x < r$ nyílt intervallumban biztosan értelmezve van, esetleg még az $x = \pm r$ pontokban is, de ez nem biztos) $f(x)$-szel:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{ha} \quad -r < x < r.$$

Igazoljuk, hogy

a) $f(x)$ akárhányszor differenciálható függvény a $-r<x<r$ intervallumon.

b) $f(x)$ k-adik differenciálhányadosa előállítható a $-r<x<r$ intervallumon az $f(x)$-et definiáló hatványsor k-szor egymás után történő tagonkénti differenciálásával, azaz

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\, a_n x^{n-k},$$

$(k = 1, 2, \ldots)$; $-r < x < r$.

E feladat korollárium, hogy minden hatványsor konvergenciaközének belsejében végtelen sokszor differenciálható folytonosan. Itt jegyezzük meg, hogy *egy intervallumon hatványsorral előállított vagy előállítható függvényt ezen intervallumon* **analitikus***nak nevezünk.**

6. Az 5. feladat jelöléseit megtartva, igazoljuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor formális integrálásával nyert

$$C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

hatványsor konvergenciaköze is pontosan r-rel egyenlő, továbbá, hogy

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

ha

$$-r < x < r, \quad -r < \alpha < r,$$

és α és C megfelelően lettek választva (pl. $\alpha = 0$; $C = 0$ megfelelő pár); azaz a hatványsort formálisan integrálva, az összegfüggvény egyik primitív függvényét kapjuk.

* E fogalom belső tartalma csak a komplex függvénytan alapján érthető meg, ezért részletesen ott tárgyaljuk.

7. Mi a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n^{n^2} x^n$$

sor konvergenciaköze, ha

$$\vartheta_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right), \text{ illetve ha } 0 < \vartheta_r \leqq \vartheta < 1. \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

8. Mi a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

hatványsor konvergenciaköze?

9. Legyen a egynél nagyobb szám: $a > 1$. Mi a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a^{(n^2)}} x^n$$

sor konvergenciaköze?

10. Mely közön konvergens a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n$$

hatványsor?

11. A bevezetésben ismertetett *Abel*-tételekkel kapcsolatban igazoljuk a következő két kiegészítő tételt:

a) Jelöljük a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor összegfüggvényét $g(x)$-szel, konvergenciaközének sugarát pedig r_0-lal. Tegyük fel, hogy a hatványsor az $x-x_0 = r_0$, illetve az $x-x_0 = -r_0$ pontban is konvergens. Mutassuk ki, hogy ekkor $g(x)$ (jobbról) folytonos az $x = x_0-r_0$, illetve (balról) folytonos az $x = x_0+r_0$ pontban, azaz

$$\lim_{x \to x_0+r-0} g(x) = g(x_0+r_0), \quad \text{illetve} \quad \lim_{x \to x_0-r_0+0} g(x) = g(x_0-r_0).$$

b) Megtartva a bevezetés jelöléseit, tegyük fel, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_0^n, \text{ illetve a } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n r_0^n$$

sor határozottan divergál. Igazoljuk, hogy ekkor határozottan végtelenhez tart az $f(x)$ összegfüggvény is, ha $x \to r_0-0$, illetve $x \to -r_0+0$, éspedig ugyanolyan értelemben (ugyanolyan előjellel), mint a megfelelő sor.

2. §. A TAYLOR-SORRÓL ÁLTALÁBAN

Az analízis – a függvényvizsgálat – egyik legtermészetesebb eszköze, ha a vizsgálandó függvényt valamely pontban és annak egy környezetében olyan függvénnyel pótoljuk, amely egyrészt igen egyszerű tulajdonságokkal rendelkezik, másrészt viszont jól pótolja, jól közelíti a vizsgálandó függvényt a kérdéses környezetben. Maga a differenciálhányados fogalma is így született: azt a lineáris függvényt (egyenest) kerestük, amely a kérdéses pontnak elegendően kis környezetében az összes lineáris függvények közül a legjobban approximálja a függvényt. Ha azt akarjuk, hogy a közelítő függvény a kérdéses pont nagyobb környezetében is jól pótolja a vizsgálandó függvényt, természetesen engedményt kell tennünk a függvény egyszerűségével szemben. Ezért magasabb fokú polinomokkal – mint viszonylag még mindig nagyon egyszerű függvényekkel – közelítünk.

Ilyen polinomokat egyszerűen származtathatunk pl. úgy, hogy egy olyan hatványsor szeleteit tekintjük, amely előállítja, vagy legalább is jól közelíti a kérdéses függvényt. Ezért a kiválasztott pontban igyekszünk a függvény és az őt approximáló polinom differenciálhányadosait egyenlővé tenni.

Igen könnyen belátható, hogy általában pontosan annyi deriváltat egyeztethetünk meg, mint ahányad fokú polinomot használunk az approximációnál. Ezzel az eljárással kapcsolatban a következő kérdések merülnek fel:

1. Hogyan kell konstruálni a kérdéses polinomot, illetve ha végtelen sok deriváltat akarunk megegyeztetni, a kérdéses hatványsort?
2. Mekkora az eltérés az egyes pontokban az approximáló polinom, illetve hatványsor és a függvény között?
3. Melyek, illetve milyen tulajdonságúak azok a függvények, amelyeket pontosan elő tudunk állítani (legalábbis egy intervallumon) íly módon?
4. Egyértelmű-e az eljárás?
5. A gyakorlatban hogyan tudjuk felhasználni ezt az eljárást?

Az első 4 kérdésre adjuk meg a legáltalánosabb formában e pontban a választ. Tekintettel azonban arra, hogy az általános formulák alkalmazása rengeteg számolással jár, a további §-okban azokat a gyakorlati módszereket mutatjuk be, amelyekkel a problémák nagy részénél gyorsan és egyszerűen is megkaphatjuk az eredményt. Az ötödik kérdésre is csak később térünk ki.

α) Elnevezések, a Taylor-polinom, illetve Taylor-sor konstrukciója

Az $y = f(x)$ függvény legyen az $x = a$ helyen megfelelően sokszor differenciálható függvény. Azt a $T_n(x)$ legfeljebb n-ed fokú polinomot, amely és amelynek első n darab deriváltja az $x = a$ helyen megegyezik az $f(x)$ függvénnyel, illetve ennek első n deriváltjával, hívjuk az

$x = a$ helyen az $f(x)$ függvényhez rendelt n-ed fokú *Taylor*-polinomnak. Ennek tehát a következő egyenlőségeket kell kiegyenlíteni:

$$T_n(a) = f(a); \quad T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a); \quad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Ha az $x = a$ hely speciálisan az origó, azaz $a = 0$, akkor a polinomot *Mac Laurin*-polinomnak nevezzük.

Ha az $f(x)$ függvény az $x = a$ helyen végtelen sokszor differenciálható, és formálisan felírjuk azt a hatványsort, amelynek formálisan számított differencálhányadosai az a helyen megegyeznek $f(x)$ megfelelő deriváltjával, előállítottuk $f(x)$ *Taylor*-sorát az $x = a$ helyen. (Azért beszélünk formális felírásról, illetve számításról, mert a konvergenciáról eleve semmit sem tudunk.) A hatványsort *Mac Laurin*-sornak hívjuk, ha speciálisan $a = 0$.

A *Taylor*-polinomot, illetve *Taylor*-sort lépésről lépésre igen könnyen képezhetjük. A polinom, illetve hatványsor célszerű általános alakja nyilván ez:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k, \text{ illetve } \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k.$$

Az $f(a) = T_n(a)$ követelményből azonnal adódik, hogy

$$a_0 = f(a).$$

Az $f'(a) = T_n'(a)$ követelmény is rögtön teljesíthető, mert

$$T_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1},$$

és így

$$T_n'(a) = 1 \cdot a_1 \cdot 1, \text{ tehát } a_1 = f'(a).$$

Ugyanígy adódik, hogy $T_n''(a) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 \cdot 1$, és így

$$a_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \text{ stb;}$$

$$T_n^{(k)}(a) = k!\, a_k, \text{ azaz } a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

stb.

A *Taylor*-sort $T(x)$-szel jelölve (ez még csak formális jelölés!), a *Mac Laurin*-sort pedig $M(x)$-szel, a következő eredményeket kaptuk:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}; \quad T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!};$$

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}; \qquad M(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

$$f^{(0)}(x) \equiv f(x).$$

β) A maradéktag alakjai

A függvény, és az őt approximáló *Taylor*-polinom eltérését az ún. maradéktaggal adjuk meg, azaz megadjuk az

$$r_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

függvényt.

A maradéktag vizsgálata nyilván arra is felvilágosítást ad, hogy mennyire tér el a függvény és a *Taylor*-sor egymástól. Az előző oldalon felírt képletekből ugyanis az derül ki, hogy a *Taylor*-sor n-edik szelete épp az n-edik *Taylor*-polinom, azaz a *Taylor*-sor a *Taylor*-polinomokból alkotott sorozat határfüggvénye. A *Taylor*-sor és a sorbafejtett függvény eltérését tehát a polinomok maradéktagjaiból alkotott sorozat határfüggvénye jellemzi.

A maradéktagnak a gyakorlatban 4 alakját használjuk. Legismertebb a *Lagrange*-féle alak:

$$r_n^{(L)}(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

ahol ξ egy az a és x között lévő megfelelő érték, azaz

$$a < \xi < x, \text{ ha } x > a, \text{ illetve } x < \xi < a, \text{ ha } x < a.$$

ξ-nek itt ugyanaz a szerepe, mint a differenciálszámítás középérték-tételében; tulajdonképpen onnét is kerül be, mert a maradéktag ezen alakját a középérték-tétel segítségével lehet legegyszerűbben kiszámítani.

A maradéktag *Cauchy*-féle alakja:

$$r_n^{(C)}(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-\xi)^n(x-a)}{n!}.$$

Mindkettő speciális esete az ún. *Schlömilch*-féle alakjának:

$$r_n^{(S)}(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^k(x-\xi)^{n-k+1}}{n!\cdot k},$$

ahol is ismét $a < \xi < x$, ha $a < x$, $x < \xi < a$, ha $x < a$,

vagy egy formulába tömörítve:

$$\xi = a + \vartheta(x-a); \quad 0 < \vartheta < 1,$$

A maradéktag integrálalakja:

$$r_n^{(i)}(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt.$$

A legegyszerűbb praktikus következtetés a maradéktag *Lagrange*-féle alakjából vonható le:

Ha a sorfejtés helye (a) és a számolás helye (x) közötti szakaszon a sorbafejtett $f(x)$ függvény $n+1$-edik deriváltja abszolút értékének maximumát M-mel jelöljük, akkor a hibára (ti. az n-ed fokú polinom és a függvény eltérésére) a

$$H \leqq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

becslést kapjuk.

γ) A hatványsorral előállítható függvényekről

A maradéktag (hibatag) bármelyik alakját tekintjük is, láthatjuk, hogy n-ed fokú polinomokkal azok és csak azok a függvények állíthatók elő pontosan egy intervallumon, amelyeknek ezen intervallumon azonosan 0 az $(n+1)$-edik deriváltjuk, azaz a legfeljebb n-ed fokú polinomok. A többi függvény polinommal nem állítható elő, legfeljebb hatványsorral. Hogy azonban a *Taylor*-sort egyáltalán képezni tudjuk, ahhoz a függvénynek az adott helyen végtelen sokszor differenciálhatónak kell lennie. Ez azonban még nyilván nem elég, mert a függvény deriváltjai e helyen növekedhetnek olyan gyorsan is, hogy a maradéktag esetleg az $x = a$ hely kivételével egyetlen helyen sem tart 0-hoz. Amennyiben az $x = a$ hely benne van egy olyan $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ intervallumban, amelyben a maradéktag egyenletesen 0-hoz tart, azaz ezen intervallumban a *Taylor*-sor előállítja a sorbafejtett függvényt, akkor (és csakis akkor) *azt a* kérdéses $x = a$ *helyen hatványsorba fejthetőnek*, ill. *hatványsorral előállíthatónak* nevezzük.

A maradéktag *Lagrange*-alakjának vizsgálatából megadhatunk néhány elégséges kritériumot ahhoz, hogy a függvény hatványsorral előállítható legyen:

Ilyen pl. az $f(x)$ függvény az $x = a$ helyen, ha e helynek egy környezetében (pl. az $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ intervallumban) végtelen sokszor deriválható, és deriváltjai ebben a környezetben közös korlát alatt maradnak.

Elégséges azonban az is, ha az $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ intervallumban végtelen sokszor differenciálható az $f(x)$ függvény, továbbá n-edik deriváltja abszolút értékének az $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$-ban vett maximumát M_n-nel jelölve, az

$$\left\{M_n \frac{\varepsilon^n}{n!}\right\}$$

sorozat 0 sorozat. (Ez sokkal kevesebbet köt ki, mert így M_n – méghozzá igen gyorsan, pl. gyorsabban, mint az $\{n!\}$ sorozat – tarthat a ∞-hez.)

δ) Az egyértelműségről

Az egyértelműség kérdését is meg kell részletesen tárgyalnunk, mert ebből nagyon fontos praktikus következtetéseket tudunk a későbbiekben levonni. Az egyértelműséggel kapcsolatban a következő két kérdés merül fel:

1. Egyértelműen határozza-e meg a függvény saját *Taylor*-sorát egy olyan pontban, amelyben előállítható hatványsorral?

2. Egyértelműen határozza-e meg a *Taylor*-sor konvergenciaközében a sorbafejtett függvényt, ha az ezen közben mindenütt előállítható hatványsorral?

Az első kérdésre a válasz igen egyszerű. Ha a függvény és deriváltjai egyértékűek, akkor nyilván igen, hiszen a *Taylor*-sor egy-egy együtthatóját a függvény megfelelő rendű deriváltja egyértelműen határozza meg. Ha a függvény, illetve deriváltjai többértékűek, akkor tulajdonképpen több függvényről van szó: minden értékrendszer egy és csakis egy *Taylor*-sort határoz meg és viszont.

A második kérdésre ismét igenlő választ adunk. Praktikus szempontból ez nagyon fontos. A sorbafejtés gyakorlati módszerei között ugyanis sok olyant is ismertetünk, amelyeknél csak arról tudunk meggyőződni, hogy a hatványsor kiszámított együtthatói megegyeznek a sorbafejtendő függvény Taylor-sorának együtthatóival. Tegyük fel, hogy azt is tudjuk, hogy a kérdéses függvény valamely – a sorbafejtés helyét is tartalmazó – $[a, b]$ intervallum minden pontjában hatványsorba fejthető. Ez esetben az 1. és 2. kérdésre adott válaszaink alapján a következőket állíthatjuk: Az általunk kiszámított hatványsor saját konvergenciaintervalluma és az imént említett $[a, b]$ intervallum **közös részén** előállítja a szóban forgó függvényt, ott tehát annak *Taylor*-sora.

Meg kell jegyeznünk, hogy logikailag még egy harmadik kérdést is felvethetnénk:

Gyakran előfordul, hogy valamely függvényt az $x = a$ helyen *Taylor*-sorba fejtve, a kapott hatványsor konvergenciaköze kisebb, mint az az a helyet tartalmazó intervallum, amelynek minden pontjában hatványsorba fejthető a szóban forgó függvény. Látni fogjuk, hogy az a helyen felírt hatványsor ismeretében (a sorbafejtett függvény felhasználása nélkül) meg tudunk adni egy olyan $x = b$ helyre vonatkozó hatványsort, amely b hely benne van az eredeti sor konvergenciaközében, és amely esetben a két hatványsor (konvergenciaközük közös részintervallumán) ugyanazt a függvényt állítja elő. Igaz-e az ebben az esetben, hogy az $x = b$ helyen felírt hatványsor az eredeti függvény b helyre vonatkozó *Taylor*-sorát szolgáltatja?

Erre – az első két kérdésre adott válasz alapján – ismét igenlő választ adhatunk. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a válasz lényeges tartalmát csak a komplex függvénytan ismeretében lehet megérteni.

Az itt adott válaszok az e részhez tartozó feladatokból azonnal kiolvashatóak.

Példák és feladatok

α

1. Írjuk fel az

$$y = e^x$$

függvény *Mac Laurin*-sorát, illetve *Taylor*-sorát az $x = 2$ helyen.

2. Határozzuk meg az

$$y = \sin x$$

függvény *Mac Laurin*-sorát, illetve *Taylor*-sorát az $x = \frac{\pi}{4}$ helyen.

3. Írjuk fel az

$$y = \cos x$$

függvény *Mac Laurin*-sorát, illetve *Taylor*-sorát az $x = \frac{\pi}{4}$ helyen.

4. Tekintet nélkül arra, hogy a 2., illetve 3. feladatban felírt *Mac Laurin*-, illetve *Taylor-sorok* a sorbafejtett függvényeket állítják elő, igazoljuk, hogy e hatványsorok kielégítik a trigonometrikus függvényeket jellemző

a) $$T^2_{\sin x}(x)+T^2_{\cos x}(x) = 1$$

b) $$\frac{d^2}{dx^2}T_{\sin x}(x) = \frac{d}{dx}T_{\cos x}(x) = -T_{\sin x}(x)$$

egyenleteket, továbbá a

c) $$T_{\sin x}(x_1+x_2) = T_{\sin x}(x_1)\,T_{\cos x}(x_2)+T_{\cos x}(x_1)\,T_{\sin x}(x_2),$$

illetve a

$$T_{\cos x}(x_1+x_2) = T_{\cos x}(x_1)\,T_{\cos x}(x_2)-T_{\sin x}(x_1)\,T_{\sin x}(x_2)$$

függvényegyenletet és

d) Mindkét hatványsor periodikus függvényt állít elő.

Útmutatás: Az 1. § *b)* 3. feladata alapján könnyen megállapíthatjuk, hogy valamennyi sor (a tagonkénti differenciálással kapott sorok is) x minden értékére konvergens, hiszen

$$\frac{1}{\overline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \underline{\lim}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leqq \underline{\lim}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \underline{\lim}\,(n+1) = +\infty.$$

Ugyanezen intervallumon abszolút és egyenletesen is konvergál mindegyik sor, és így az igazolandó relációk kimutatásához szükséges szorzások és tagonkénti differenciálások megengedettek.

Magát a számítást mi itt nem végezzük el, mert elég könnyű és mechanikus munka, hanem csak azt jegyezzük meg, hogy eredményül azt kapjuk, hogy az egyenletek jobb és bal oldalán a hatványsorok megfelelő együtthatói megegyeznek. Ez pedig nyilván elégséges, sőt a 2. § *δ)* pont értelmében szükséges feltétele is annak, hogy a két oldal egyenlő legyen.

Megjegyezzük még, hogy *a)*, *b)* és *c)* bizonyítása a legelegánsabb módon a következőképp történhet:

1. Igazoljuk a *b)* egyenlőséget, illetve emellett a

$$\frac{d}{dx}T_{\sin x} = T_{\cos x} \text{ és a } \frac{d}{dx}T_{\cos x} = -T_{\sin x}$$

egyenlőségeket.

2. Ha a *Taylor*-sor

$$T(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$

formuláját az $x = a+\xi$ helyettesítéssel a

$$T(a+\xi) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\xi + \frac{f''(a)}{2!}\xi^2 + \dots$$

alakba írjuk, akkor a bizonyítandó

$$T_{\sin x}(x_1+x_2) = T_{\sin x}(x_1)\,T_{\cos x}(x_2) + T_{\sin x}(x_2)\,T_{\cos x}(x_1)$$

reláció bal oldalának sorfejtése így is előállítható az $a = x_1$; $\xi = x_2$ jelölések bevezetésével:

$$T_{\sin x}(x_1+x_2) = T_{\sin x}(x_1) + \frac{T'_{\sin x}(x_1)}{1!}x_2 + T''_{\sin x}(x_1)\frac{x_2^2}{2!} + T'''_{\sin x}(x_1)\frac{x_2^3}{3!} +$$

$$+ \dots + T^{(k)}_{\sin x}(x_1)\frac{x_2^k}{k!} + \dots$$

Ha most felhasználjuk az 1.-ben a differenciálhányadosokra felírt összefüggést, akkor ezt kapjuk:

$$T_{\sin x}(x_1+x_2) = T_{\sin x}(x_1) + T_{\cos x}(x_1)\frac{x_2}{1!} - T_{\sin x}(x_1)\frac{x_2^2}{2!} -$$

$$- T_{\cos x}(x_1)\frac{x_2^3}{3!} + + - - \dots =$$

$$= T_{\sin x}(x_1)\left\{1 - \frac{x_2^2}{2!} + \frac{x_2^4}{4!} - + \dots\right\} + T_{\cos x}(x_1)\left\{\frac{x_2}{1!} - \frac{x_2^3}{3!} + \frac{x_2^5}{5!} - + \dots\right\},$$

ez pedig máris a kívánt összefüggés.

3. A 2. pont alapján felírhatjuk, hogy

$$T_{\cos x}(x_1+x_2) = T_{\cos x}(x_1)\,T_{\cos x}(x_2) - T_{\sin x}(x_1)\,T_{\sin x}(x_2).$$

Ha itt az $x_1 = -x_2 = x$ helyettesítést elvégezzük, azonnal adódik az igazolandó $T^2_{\cos x}(x) + T^2_{\sin x}(x) = 1$ egyenlőség.

4. A legnehezebb feladat a felírt hatványsorok periodicitásának igazolása. Ez pl. a következőképp történhet: $T_{\cos x}(x)$ felírt sorából azonnal kiolvasható, hogy $T_{\cos x}(0) = 1$.

Könnyű kimutatni (pl. két egymást követő tag zárójelezésével, ami konvergens soroknál mindig megengedett), hogy

$$T_{\cos x}(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - \left(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!}\right) - \left(\frac{2^{14}}{14!} - \frac{2^{16}}{16!}\right) - \dots -$$

$$- \left(\frac{2^{4k-2}}{(4k-2)!} - \frac{2^{4k}}{(4k)!}\right) - \dots$$

negatív szám. Mivel pedig

$$T_{\cos x}(x)$$

folytonos függvény, ezért 0 és 2 között bizonyosan van legalább egy zérushelye. Jelöljük a legkisebb ilyen zérushelyet ξ-vel $\left(\text{nyilván } \xi = \frac{\pi}{2}\right)$.

Könnyen belátható, hogy a

$$\frac{d}{dx} T_{\cos x}(x) = -T_{\sin x}(x)$$

függvény, amely a $T_{\cos x}(x)$ függvény deriváltja, 0 és 2 között állandóan negatív. Ti. $-T_{\sin x}(x)$ hatványsora zárójelezéssel így alakítható át:

$$-T_{\sin x}(x) = -x\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) - \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) - \ldots,$$

itt pedig a $0 \leqq x \leqq 2$ intervallumban nyilván minden zárójelben levő tag pozitív!

Tehát ξ egyetlen gyöke a $0 \leqq x \leqq 2$ szakaszon a $T_{\cos x}(x)$ függvénynek. Már most a $T^2_{\sin x}(x) + T^2_{\cos x}(x) = 1$ egyenletből következik, hogy

$$T_{\sin x}(\xi) = +1.$$

és itt $T_{\sin x}(x)$-nek maximuma van.

Ebből a 2.-ben levezetett addiciós tételek segítségével azonnal következik, hogy

$$T_{\cos x}(2\xi) = -1; \qquad T_{\sin x}(2\xi) = 0;$$

$$T_{\cos x}(4\xi) = +1; \qquad T_{\sin x}(4\xi) = 0,$$

továbbá

$$T_{\cos x}(x + \xi) = -T_{\sin x}(x),$$

$$T_{\cos x}(x + 2\xi) = -T_{\cos x}(x)$$

stb. Végül

$$T_{\cos x}(x + 4\xi) = T_{\cos x}(x), \qquad \text{q. e. d.}$$

5. Igazoljuk a 2. § α) 3. feladatban felírt sorok segítségével, hogy a

$$T_{e^x}(x_1 + x_2) = T_{e^x}(x_1) \cdot T_{e^x}(x_2)$$

függvényegyenlet x_1 és x_2 minden értékére érvényes.

6. Írjuk fel az

a) sh x *b)* ch x

függvény *Mac Laurin*-sorát, illetve *Taylor*-sorát az $x = 1$ helyen.

7. A 6. feladat alapján igazoljuk, hogy az

a) $T^2_{\mathrm{ch}\, x}(x) - T^2_{\mathrm{sh}\, x}(x) = 1$

b) $T_{\mathrm{sh}\, x}(x_1 + x_2) = T_{\mathrm{sh}\, x}(x_1)\, T_{\mathrm{ch}\, x}(x_2) + T_{\mathrm{ch}\, x}(x_1)\, T_{\mathrm{sh}\, x}(x_2)$

és a

$$c) \quad T_{\operatorname{ch} x}(x_1+x_2) = T_{\operatorname{ch} x}(x_1)\, T_{\operatorname{ch} x}(x_2) + T_{\operatorname{sh} x}(x_1)\, T_{\operatorname{sh} x}(x_2)$$

összefüggések x, illetve x_1 és x_2 minden értékére érvényesek.

8. Írjuk fel az

$$(1+x)^{\alpha}$$

(α tetszőleges valós szám), illetve az

$$\ln(1+x)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

9. Írjuk fel az

$$y = \ln x$$

függvény *Taylor*-sorát az $x = e$ helyen.

10. Igazoljuk, hogy bármely az $x = 0$ helyen végtelen sokszor differenciálható és

$\begin{cases}\text{páros}\\ \text{páratlan}\end{cases}$ függvény *Mac Laurin*-sora x-nek csak $\begin{cases}\text{páros}\\ \text{páratlan}\end{cases}$ hatványait tartalmazza.

Igazoljuk továbbá, hogy bármely az $x = a$ helyre szimmetrikus $g(x)$ függvény: illetve bármely az $x = a$ helyre antiszimmetrikus $h(x)$ függvény, $x = a$ helyen felírt *Taylor*-sora $(x-a)$-nak csak páros, illetve csak páratlan hatványait tartalmazza.

11. Írjuk fel az

$$y = \operatorname{tg} x$$

függvény $\frac{\pi}{4}$ helyhez tartozó *Taylor*-sorának első három tagját.

12. Írjuk fel az

$$y = x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 10$$

függvénynek az $a = 1$ helyhez tartozó *Taylor*-polinomját.

13. Írjuk fel az

$$y = 2 + x^2 - 3x^5 + 7x^6$$

üggvény $a = 1$ helyhez tartozó *Taylor*-polinomját.

14. Határozzuk meg az

$$y = \frac{1}{2}\sin 3x$$

függvény *Taylor*-sorának első öt tagját az $x = 1$ helyen.

15. Írjuk fel az

$$y = \ln x$$

függvény *Taylor*-sorát az $x = 2$ helyen.

16. Írjuk fel az

$$y = \operatorname{ar\,ch} x$$

függvény *Taylor*-sorának első 4 tagját az $x = 4$ helyen.

17. Írjuk fel az

$$y = \operatorname{th} x$$

függvény *Taylor*-sorának első négy tagját az $x = 1$ helyen.

18. Meghatározandó

$$y = \ln \cos x$$

Taylor-sora az $x = \frac{\pi}{4}$ helyen.

19. Írjuk fel a következő függvények $x = a \quad (a > 0)$ helyhez tartozó *Taylor*-sorát:

a) $y = \cos x$,
b) $y = \sin x$,
c) $y = e^x$,
d) $y = \ln(5a + x)$,
e) $y = \operatorname{sh} x$,
f) $y = \operatorname{ch} x$.

β

1. Az

$$y = f(x)$$

függvény legyen integrálható az $[a, b]$ intervallumon. Fejezzük ki az $f^{(-1)}(x)$, $f^{(-2)}(x)$ ... függvényeket $(a \leqq x \leqq b)$ egyetlen integráljel segítségével, másként szólva olyan műveletekkel, amelyek között határozott, illetve határozatlan integrálás legfeljebb egyszer fordul elő. Itt

$$f^{(-1)}(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi, \quad f^{(-2)}(x) = \int_a^x \left[\int_a^{\xi_1} f(\xi)\, d\xi \right] d\xi_1 \ldots \quad (a \leqq \alpha < b)$$

2. Írjuk fel az

$$y = \frac{1}{16} \sin 2x$$

függvény 15-ös indexű maradékának valamennyi alakját, és próbáljuk becsülni ennek alapján a *Mac Laurin*-sor 15. szeletének hibáját a $(0, 2)$ intervallumban.

Megoldás: A maradéktag egyes alakjainak felírását az olvasóra bízzuk. A legegyszerűbb becslés a $(0, 2)$ szakaszra a *Lagrange*-alak alapján adható, minthogy

$$|\sin 2\xi| \leqq 1.$$

Ennek alapján:

$$|H(x)| = |r_{15}(x)| \leqq \frac{4096}{16!} x^{16} \quad (0 < x < 2),$$

ahol $H(x)$-szel jelöltük az x helyen elkövetett hibát.

A hiba integrálalakja:

$$r_{15}(x) = \frac{4096}{15!} \int_0^x \sin 2t\,(x-t)^{15}\,dt.$$

Legtöbbet ennek alapján mondhatunk. Elsősorban is kimutathatjuk, hogy a hiba (azaz a maradéktag) bizonyosan pozitív előjelű, ha $0 < x \leqq 2$. Ehhez csak azt kell meggondolni, hogy $\sin 2t > 0$, ha $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Tegyük fel ugyanis, hogy $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$. Ekkor közvetlenül leolvasható, hogy $r_{15}(x)$ pozitív, minthogy az integrandus mindenütt pozitív. Ha viszont $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2$, akkor

$$r_{15}(x) = \frac{4096}{15!}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,(x-t)^{15}\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin 2t\,(x-t)^{15}\,dt\right]$$

és itt a szögletes zárójelen belül az első tag pozitív, a második negatív előjelű. Hogy a második tag abszolút értéke kisebb, mint az első, az igen egyszerűen, pl. a következő módon látható be:

A második integrál integrációs tartománya rövidebb, mint az elsőé, emellett a második integrál integrandusa (amely állandóan negatív előjelű) valamely $\frac{\pi}{2}$ és x közé eső t helyen abszolút értékben mindig kisebb, mint az első integrál integrandusa a t-hez $\left(\frac{\pi}{2}\text{-re}\right)$ szimmetrikus helyen, $\left(x = \frac{\pi}{2} - t\text{-nél}\right)$. $\sin 2t$ ugyanis e két, $\frac{\pi}{2}$-re szimmetrikus helyen egyenlő, (de az $(x-t)^{15}$ tényező az első integrandusban lényegesen nagyobb, mint a másodikban). Ebből pedig már következik állításunk.

Feladatként precízen dolgozzuk ki a fenti vázlatos igazolást!

Megjegyezzük, hogy $r_{15}(x)$ pozitív voltát a másik három maradéktag csak a $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ szakaszon biztosítja.

A hibára is pontosabb becslést ad a maradéktag integrálalakja, mint az eddigiek. Már az egész durva

$$|\sin x| \leqq |x|$$

egyenlőtlenség felhasználásával is

$$|H(x)| = |r_{15}(x)| \leqq \frac{4096}{15!} \int_0^x 2|t|(x-t)^{15}\,dt =$$

$$= \frac{4096}{15!} 2 \int_0^x t(x-t)^{15}\,dt = 2\frac{4096}{17!} x^{17}$$

Ha sin $2t$-t pontosabban becsüljük, pl.

$$\sin 2t \leqq 2t, \text{ ha } 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{8}; \quad |\sin 2t| \leqq 1, \text{ ha } \frac{\pi}{8} \leqq t \leqq 2$$

stb., még pontosabb és jobb becslést kapunk a maradéktagra.

3. Írjuk fel az

$$y = (1+x)^{\alpha}$$

függvény (α valós szám) n indexű maradéktagjának valamennyi alakját, és próbáljuk becsülni ennek alapján a *Mac Laurin*-sor n-edik szeletének hibáját a (0; 0,1), illetve $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ intervallumon.

4. Sorbafejtve az

$$y = \ln x$$

függvényt az $x = 3$ helyen, írjuk fel a *Taylor*-sor 10 indexű maradéktagjának mind a négy alakját. Próbáljunk ebből hibabecslő formulát adni, és a következtetéseket levonni a

$$2 \leqq x \leqq 4$$

szakaszon.

γ

1. Hatványsorba fejthető-e az

$$y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény az $x = 0$, illetve az $x = 10$ helyen?

Útbaigazítás. Annak kimutatását, hogy a függvény minden pontban végtelen sokszor differenciálható, s hogy valamennyi derivált a 0 értéket veszi fel az $x = 0$ helyen, az olvasóra bízzuk. Ebből következően függvényünk Mac-Laurin sora:

$$M(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots = 0,$$

tehát az $x = 0$ helyen a függvényt nem lehet hatványsorba fejteni. Hogy az $x = 10$ helyen hatványsorba fejthető a függvény, az következik, a 2. § γ) 6., 7., ill. 8. feladatában igazolandó általános tételekből. Célszerű azonban, ha az olvasó meg-

kísérli közvetlenül is ennek igazolását. E célból – bármelyik alakját használjuk is fel a maradéktagnak – becslést kell adnunk a függvény n-edik deriváltja abszolút értékének az $x = 10$ hely valamely környezetében felvett maximumára. Épp ez a nagyon fáradságos feladat.
Útbaigazításul megjegyezzük:

a) Az n-edik derivált legfeljebb 2^{n-1} számú $\frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}}$ alakú tagot tartalmaz.

b) Ezek együtthatói kisebbek $\frac{2^n (2n)!}{n!}$-nál.

c) k minimális értéke $(n+2)$-vel egyenlő.

d) $\frac{(2n)!}{[n!]^2} < 4e\, 2^{2n} (n+2)^2$. (L. pl. a B. VI. kötetet.)

2. Mely pontokban fejthető hatványsorba az

$$y = \sin x$$

függvény?

3. Mely pontokban fejthető hatványsorba az

$$y = e^x$$

függvény?

4. Mely pontokban fejthető hatványsorba az

$$y = \ln |x|$$

függvény?

5. Hol fejthető hatványsorba az

$$y = \frac{x-5}{x^2 - 3x + 4}$$

függvény?

6. Igazoljuk, hogy ha az $x = x_0$ pontban hatványsorba fejthető az

$$y = y_1(x) \quad \text{és az} \quad y = y_2(x)$$

függvény, akkor az

$$y = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

és az

$$y = y_1(x) y_2(x)$$

függvény is hatványsorba fejthető az $x = x_0$ pontban! (α és β tetszőleges valós állandók.)

7. Igazoljuk, hogy ha az $x = x_0$ pontban hatványsorba fejthető az

$$y = y_1(x) \quad \text{és az} \quad y = y_2(x)$$

függvény és emellett

$$y_2(x_0) \neq 0,$$

akkor hatványsorba fejthető az $x = x_0$ pontban az

$$y = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$

függvény is.

8. Legyen az $y = g(x)$ függvény hatványsorba fejthető az $x = x_0$ pontban, a

$$z = f(y)$$

függvény pedig az $y_0 = g(x_0)$ pontban. Igazoljuk, hogy ekkor hatványsorba fejthető a

$$z = f[g(x)]$$

függvény is az $x = x_0$ pontban.

Megoldás: Hogy az

$$y = g(x)$$

függvény hatványsorba fejthető az $x = x_0$ pontban, az a definíció szerint annyit jelent, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

hatványsor konvergenciasugara $r_g > 0$, továbbá, hogy létezik egy olyan $\varepsilon_g > 0$ szám, amelyre fennáll a

$$|T_{g(x)}(x) - g(x)| \equiv 0 \quad (\text{ha } x_0 - \varepsilon_g \leqq x_0 \leqq x_0 + \varepsilon_g)$$

azonosság.

Az az állításunk, hogy a $z = f(y)$ függvény hatványsorba fejthető az $y = g(x_0) = y^0$ pontban, ugyanígy azt jelenti, hogy a

$$T_f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(y_0)}{n!}(y-y_0)^n$$

hatványsor konvergenciasugara $r_f > 0$, továbbá, hogy létezik egy olyan $\varepsilon_f > 0$ szám, amelyre fennáll a

$$|T_f(y) - f(y)| \equiv 0 \quad (y_0 - \varepsilon_f \leqq y \leqq y_0 + \varepsilon_f)$$

azonosság.

Hasonló módon igazoljuk, hogy a $z = f[g(x)]$ függvény is hatványsorba fejthető az $x = x_0$ helyen.

Vezessük be e célból az $y = g(x)$ jelölést. Feltételeink szerint a $z = f[y]$ függvény az $y = y_0$ pontban hatványsorba fejthető, azaz a

$$T_f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(y_0)}{n!}(y-y_0)^n$$

hatványsor egy ε_f sugarú közön előállítja a $z = f[y]$ függvényt. Helyettesítsük vissza y helyébe a $g(x)$ függvényt, pontosabban annak konvergens és az ε_g sugarú közön $g(x)$-et előállító hatványsoralakját; tehát az

$$y-y_0 = y-g(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

alakot.

Összefoglalva: A $z=f[g(x)]$ függvényt a

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{f^{(n)}[g(x_0)]}{n!}[g(x)-g(x_0)]^n = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{f^{(n)}[g(x_0)]}{n!}\left(\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{g^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)^n$$

sor (felhívjuk a figyelmet arra, hogy ez utóbbi sor nem hatványsor, mert nincs $(x-x_0)$ növekvő hatványai szerint rendezve; ha ez megtörtént volna, máris igazoltuk volna tételünket) előállítja a

$$g(x_0)-\varepsilon_f \leqq g(x) \leqq g(x_0)+\varepsilon_f$$

intervallumon. Ha tehát igazolnánk, hogy a sor második alakját át lehet rendezni $(x-x_0)$ hatványai szerint (legalábbis valamilyen

$$x_0-\varepsilon_0 \leqq x \leqq x_0+\varepsilon_0$$

intervallumon) anélkül, hogy a sorösszeg változnék, igazolnánk tételünket, amely szerint a $z=f[g(x)]$ függvény az $x=x_0$ helyen hatványsorba fejthető.

Hogy az átrendezés jogos-e, elsősorban azt kell igazolnunk, hogy a

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)^n$$

kifejezések átrendezhetők $(x-x_0)$ hatványai szerint.

Tekintettel arra, hogy a $[g(x)-g(x_0)]$-t előállító sor az r_g sugarú köz bármely belső részintervallumában abszolút konvergens, azért a

$$[g(x)-g(x_0)]^2; \quad [g(x)-g(x_0)]^3; \ldots$$

kifejezések képzésénél a $[g(x)-g(x_0)]$-t megadó hatványsor önmagával vett szorzatait szabad *Cauchy*-módon rendezni (azaz $(x-x_0)$ azonos kitevőjű hatványait összevonni), és az így kapott hatványsorok valamennyien abszolút konvergensek lesznek az r_g sugarú köz bármely belső résztartományában.

Megjegyezzük, hogy $[g(x)]^n$ sorfejtése így kezdődik (ez különösen a gyakorlat szempontjából fontos, mert az egyes oszlopokban így csak véges számú elem különbözik 0-tól):

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)^n = \left[\frac{g'(x_0)}{1!}\right]^n (x-x_0)^n +$$

$$+\binom{n}{1}\left[\frac{g'(x_0)}{1!}\right]^{n-1}\frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^{n+1}+ \ldots =$$

$$= a_n^{(n)}(x-x_0)^n + a_{n+1}^{(n)}(x-x_0)^{n+1}+ \ldots + a_{n+p}^{(n)}(x-x_0)^{n+p}+ \ldots$$

Annak igazolásához tehát, hogy az

$$f[g(x)]$$

függvény hatványsorba fejthető az $x = x_0$ helyen, elegendő azt kimutatni, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}[g(x_0)]}{n!} \left[\sum_{k=n}^{\infty} a_k^{(n)} (x - x_0)^k \right]$$

sor (amely még mindig nem hatványsor, de amely $f[g(x)]$-et előállítja a

$$g(x_0) - \varepsilon_f \leqq g(x) \leqq g(x_0) + \varepsilon_f$$

intervallumon, és amelyben a

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k^{(n)} (x - x_0)^k$$

sorok az

$$x_0 - \varepsilon_g < x < x_0 + \varepsilon_g$$

intervallumban abszolút konvergensek) átrendezhető valamely

$$x_0 - \varepsilon_0 \leqq x \leqq x_0 + \varepsilon_0$$

intervallumban a sorösszeg megváltoztatása nélkül $(x - x_0)$ hatványai szerint.

Ahhoz, hogy a nagy átrendezési tételt alkalmazhassuk, már csak azt kell igazolni, hogy valamely $[x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0]$ közben nemcsak a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}[g(x_0)]}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} a_k^{(n)} (x - x_0)^k \text{ sor, hanem a } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(n)}[g(x_0)]|}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} |a_k^{(n)}| \, |x - x_0|^k$$

sor is konvergens.

E célból szükségünk van a következő egyszerű becslésre, amelynek igazolását az olvasóra bízzuk:

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k^{(n)}| \, |x - x_0|^k \leqq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(1)}| \, |x - x_0|^k \right]^n . \quad *$$

Tekintsük most a

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k^{(1)}| \, |x - x_0|^k$$

végtelen sort, amelyről az előzőekben megállapítottuk, hogy az

$$x_0 - \varepsilon_g < x < x_0 + \varepsilon_g$$

közön konvergens, illetve (tetszőleges $\varepsilon > 0$-val) az

$$x_0 - \varepsilon_g + \varepsilon \leqq x \leqq x_0 + \varepsilon_g - \varepsilon$$

közön egyenletesen konvergens. Minthogy pedig tagjai folytonos függvények, ezért összegfüggvénye is folytonos ezen a közön. Ez az összegfüggvény az $x = x_0$ helyen nyilvánvalóan a 0 értéket veszi fel, folytonossága következtében tehát megadható egy olyan ε_0 szám, hogy

* L. egyébként a 3. § *a)* (η) részben bemutatott gondolatmeneteket!

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(1)}|\,|x-x_0|^k \leqq \frac{\varepsilon_f}{2}, \text{ ha } |x-x_0| \leqq \varepsilon_0.$$

Ebből és az előbb levezetett segédtételből pedig az következik, hogy akkor

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k^{(n)}|\,|x-x_0|^k \leqq \frac{\varepsilon_f^n}{2^n}, \text{ ha } |x-x_0| \leqq \varepsilon_0.$$

Ha azonban ez így van, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(n)}[g(x_0)]|}{n!} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k^{(n)}|\,|x-x_0|^k \right) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(n)}[g(x_0)]|}{n!} \frac{\varepsilon_f^n}{2^n},$$

utóbbi sor pedig konvergens, mert feltételeink szerint a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(y_0)}{n!}(y-y_0)^n$$

sor abszolút konvergens, ha

$$|y-y_0| < \varepsilon_f.$$

A nagy átrendezési tétel tehát az x_0 hely körül valamely $|x-x_0| \leqq \varepsilon_0$ intervallumon biztosan alkalmazható, ott a számított hatványsor előállítja az $f[g(x)]$ függvényt, ez tehát az $x = x_0$ helyen hatványsorba fejthető, q. e. d.

9. Mely pontokban fejthető hatványsorba az

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

függvény?

10. Mely pontokban fejthető hatványsorba az

$$y = e^{-|\cos x|}$$

függvény?

11. Mely pontokban fejthető hatványsorba az

$$y = \operatorname{tg} x$$

függvény?

12. Mely pontokban fejthető hatványsorba az

$$y = \ln(2-\sin x)$$

függvény?

13. Mely pontokban fejthető hatványsorba az

$$y = \frac{2x-5}{\operatorname{ch} x \cdot |1+\operatorname{sh} x|}$$

függvény?

14. Legyen az

$$y = f(x)$$

függvény hatványsorba fejthető az $x = x_0$ pontban. Jelöljük az $f(x_0)$ értékét y_0-lal, az f függvény inverzét f^{-1}-gyel.

Igazoljuk, hogy – ha $f'(x_0) \neq 0$ (ez természetes kikötés, mert ha $f'(x_0) = 0$, akkor az inverz függvénynek e pontban függőleges érintője van, tehát nem lehet analitikus itt) – az inverz

$$x = f^{-1}(y)$$

függvény hatványsorba fejthető az $y = y_0 = f(x_0)$ pontban.

15. Mely tartományban fejthető hatványsorba az

$$y = \sqrt{x}, \text{ illetve általában az } y = x^{\alpha}$$

függvény?

§

1. Tegyük fel, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

hatványsorok konvergensek az

$$x_0 - r < x < x_0 + r$$

intervallumban, és ennek egy tetszőleges belső, de (egyelőre, az 1. feladatban!) az x_0 pontot is tartalmazó részintervallumában azonosan egyenlők egymással.

Igazoljuk, hogy ekkor

$$a_n = b_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

2. Tartsuk meg az 1. feladat jelöléseit, és tegyük fel, hogy a két hatványsorról csak annyit tudunk, hogy egy olyan $\{P_i\}$ pontsorozat minden pontjában egyeznek meg egymással, amely pontsorozat minden pontja benne van az

$$x_0 - r < x < x_0 + r$$

intervallumban, és amelynek egyik sűrűsödési pontja az x_0 abszcisszájú pont (a legutolsó kikötéstől itt is, még e szakasz folyamán megszabadulunk).

Igazoljuk, hogy ekkor

$$a_n = b_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

azaz a két hatványsor azonos.

3. Tekintsük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

hatványsort, amely az

$$x_0 - r < x < x_0 + r$$

közön konvergens. Válasszuk ki az x_1 értéket úgy, hogy az benne legyen a hatványsor konvergenciaközében, sőt közelebb legyen az x_0 helyhez, mint a konvergenciaközt határoló helyek bármelyikéhez.

Igazoljuk, hogy létezik olyan

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_1)^n$$

hatványsor, amely az $x_1-\varepsilon \leqq x \leqq x_1+\varepsilon$ intervallumon ($\varepsilon \geqq 0$; megfelelő) azonosan egyenlő a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

hatványsorral.

Határozzuk meg, hogy mi az összefüggés az a_n és b_n együtthatók között, és igazoljuk ennek alapján, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_1)^n$$

hatványsor konvergenciaköze saját belsejében tartalmazza az x_0 pontot, továbbá vagy a belsejében, vagy határpontként tartalmazza az x_0-r; x_0+r abszcisszájú pontok közül legalább az egyiket. Mutassuk ki továbbá, hogy a két hatványsor konvergenciaintervallumuk közös részén ugyanazt a függvényt állítja elő.

4. Tartsuk meg a 3. feladat jelöléseit és feltételeit, azon feltétel kivételével, hogy x_1 közelebb van x_0-hoz, mint akár x_0-r-hez, akár x_0+r-hez. Igazoljuk, hogy ekkor is létezik egy olyan

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_1)^n$$

hatványsor, amely az x_1 hely elegendően kis környezetében azonosan egyenlő az eredeti hatványsor által definiált függvénnyel, együtthatói ugyanúgy származnak az a_n együtthatókból, mint a 3. feladatban. Igazoljuk továbbá, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_1)^n$$

hatványsor konvergenciaköze tartalmazza (belsejében vagy határpontként) az x_0-r, illetve x_0+r pontoknak legalább egyikét, továbbá, hogy a két hatványsor konvergenciaközük közös részén mindenütt azonosan egyenlő.

5. Megtartva a 2. § δ) 1. feladat jelöléseit, tegyük fel, hogy a két hatványsor konvergenciaközének egy olyan belső részintervallumán egyenlő egymással, amely nem tartalmazza az $x = x_0$ helyet. Igazoljuk, hogy az

$$a_n = b_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

egyenlőségek ekkor is fennállnak, azaz a két hatványsor azonosan egyenlő.

3. §. A MAC LAURIN-, ILLETVE TAYLOR-SOROK SZÁMÍTÁSTECHNIKÁJA

a) A Mac Laurin-sorok előállításáról

A *Mac Laurin*-, illetve *Taylor*-sorok nagy részét nem úgy szoktuk képezni, hogy egymás után kiszámítjuk a sorbafejtendő függvény deriváltjait, illetve ezek értékét a sorfejtés helyén; világos ugyanis, hogy ez a módszer nagyon hosszadalmas. A legkülönbözőbb utak, technikai fogások állnak rendelkezésünkre ezen feladat megoldásának lényeges meggyorsítására. Ugyanez vonatkozik a hibabecslésre, a konvergenciatartomány megállapítására stb. is. A következőkben bevezetőül az eredeti módszert gyakoroljuk, majd egymás után bemutatjuk azokat az eljárásokat, amelyekkel a sorfejtés lényegesen meggyorsítható, gyakran szinte mechanikussá tehető.

Felhívjuk a figyelmet azonban arra, hogy a 2. § α) pont feladatai között szereplő *Mac Laurin*-sorokat, konkréten az elemi függvények sorát igen gyakran használjuk, ezért azokat (alakjuk egyébként nagyon egyszerű) célszerű megjegyezni.

α) A deriváltak kiszámításával felírt Mac Laurin-sorok

Ha a sorbafejtendő függvény deriváltjainak értékét számítani tudjuk az $x = 0$ helyen elemi eszközökkel, felírhatjuk *Mac Laurin*-sorát. A módszer persze általában nagyon hosszadalmas; ha azonban az n-edik deriváltat explicite elő tudjuk állítani, elég egyszerű ez a módszer is.

β) Egyszerű helyettesítéssel számított Mac Laurin-sorok

Az összetett (közvetett) $y = f[g(x)]$ függvényben a $z = g(x)$ helyettesítést elvégezve, a kapott $y = f[z]$ függvénynek gyakran közvetlenül fel tudjuk írni (a z változóban) *Mac Laurin*-sorát. A sorban elvégezve a

$$z = g(x)$$

helyettesítést, megkapjuk az eredeti függvénynek a $g(x)$ függvény hatványai szerint haladó sorát (amely persze általában már nem *Mac Laurin*-, illetve *Taylor*-sor). Ez azonban előállítja a sorbafejtett függvényt, éspedig a

$$g(x) = 0$$

egyenlet gyökének (gyökeinek) egy környezetében. Ezt a környezetet meg is tudjuk határozni, illetve becsülni, ha ismerjük, illetve becsülni tudjuk a z változóban felírt hatványsor konvergenciasugarát. Ezt r_0-lal jelölve, meg kell határoznunk a

$$g(x) = r_0, \text{ illetve } g(x) = -r_0$$

egyenlet gyökeit; e gyökök határolják majd a konvergencia-intervallumot (most nem közt, mert nem hatványsorról van szó).

Abban a speciális esetben azonban, ha

$$g(x) = \sum_{n=1}^{p} a_k x^k,$$

a helyettesítés módszerével nyilván a közvetett függvény *Mac Laurin*-sorát kapjuk. Ha $f(z)$ páros függvény, akkor a

$$g(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^{\frac{2k+1}{2}}$$

(k természetes szám) esetben is megkapjuk az $f[g(x)]$ függvény *Mac Laurin*-sorát, mert (2. § α) 12. feladat) páros függvény *Mac Laurin*-sora a változónak csak páros hatványait tartalmazza, s így a visszahelyettesítés után ismét olyan *hatványsort* kapunk, amely a 0 hely egy környezetében előállítja a kérdéses függvényt. Ha viszont

$$g(x) = \sum_{k=0}^{p} \cdot a_k (x - x_0)^k,$$

akkor visszahelyettesítés után az $f[g(x)]$ függvény $x = x_0$ helyen felírt *Taylor*-sorát kapjuk nyilván.

γ) Differenciálhányados vagy primitív függvény segítségével számított sorok

A függvénysorokat egyenletes konvergenciájuk tartományában szabad tagonként integrálnunk; ha pedig a differenciálással kapott sor egyenletesen konvergens, akkor differenciálhatjuk is tagonként. Hatványsorokat — tehát a *Mac Laurin*- és a *Taylor*-sort is — konvergenciatartományuk bármely belső résztartományában ezek szerint differenciálhatjuk is, integrálhatjuk is tagonként (1. § b) 5. és 6. feladat). Így igen sok függvény *Mac Laurin*-sorát a binomális vagy a geometriai sor segítségével számolhatjuk.

Ha ti. a kérdéses függvény valamelyik deriváltjának *Mac Laurin*-sorát fel tudjuk írni (ez pedig egyenletesen konvergens a konvergenciaköz bármely belső zárt részintervallumán), akkor ez az eredeti függvény *Mac Laurin*-sorának megfelelő rendű deriváltja. A tagonkénti integrálás, és az integrációs konstansoknak az általános *Mac Laurin*-formula alapján történő kiszámítása után tehát megkapjuk az eredeti függvény *Mac Laurin*-sorát, amelynek konvergenciasugara az 1. § b) 4. feladat eredményei szerint egyezik a derivált *Mac Laurin*-sorának konvergenciasugarával.

δ) Az alapműveletek véges számú ismétlésével számított sorok

Konvergens végtelen sorokat a közös konvergenciatartományban tagonként vonhatunk össze, abszolút konvergens sorokat (a hatványsorok konvergenciaközük bármely belső résztartományában abszolút konvergensek) a többtagúak szorzási és osztási szabályai szerint szorozhatunk és oszthatunk.

ε) A nagy átrendezési tétel segítségével számított sorok

A 3. § *a) β)* pontban említett módszer egyszerű tovább fejlesztéséről lesz szó. Láttuk ott, hogy a közvetett $f[g(x)]$ függvényben a $z = g(x)$ helyettesítést elvégezve, a kapott $f[z]$ függvény *Mac Laurin*-sorát gyakran könnyen felírhatjuk. A $z = g(x)$ visszahelyettesítése után azonban csak bizonyos speciális esetekben (pl. ha $g(x)$ polinom) kaptunk *Mac Laurin*-, illetve *Taylor*-sort. Gyakran azonban $g(x)$ maga is könnyen *Mac Laurin*-sorba fejthető. Ha ebben a formájában helyettesítjük vissza $g(x)$-et, és egyrészt $g(x)$ hatványozásánál *Cauchy*-szerint rendezhetjük a részletszorzatokat (tehát összevonhatjuk az azonos fokszámú tagokat a szorzat kifejtésében), valamint alkalmazhatjuk a nagy átrendezési tételt (azaz összevonhatjuk az összes szereplő és azonos kitevőjű tagot), akkor ismét *Mac Laurin*-sorra jutunk. A hatványozásnál biztosan rendezhetjük *Cauchy*-szerint a részletszorzatokat, mert az összeszorzott sorok konvergenciaközük belsejében abszolút konvergensek valamennyien. Ebből az is következik, hogy szorzatuk abszolút konvergens, azaz a nagy átrendezési tétellel kapcsolatban a sorokról már azt is tudjuk, hogy abszolút konvergensek. Hogy a nagy átrendezési tétellel kapcsolatos második szükséges feltétel is teljesül-e, ti. hogy az abszolút értékek segítségével képezett sorösszegek összege is konvergens-e, arra a 2. § *γ)* pont 7. feladatában adtunk igenlő választ. A konvergenciatartományt azonban esetenként kell megvizsgálnunk.

ζ) Ismert függvénytulajdonságok felhasználása

A sorbafejtendő függvény tulajdonságainak felhasználásával gyakran lényegesen egyszerűsíteni tudjuk a sorbafejtést. Így pl. a törteket célszerű részlettörtekre bontani; gyakran jól felhasználhatók az addíciós, multiplikatív tételek is stb.

η) Rekurziós formulák, inverz függvények felhasználása

Lásd a feladatokat.

Példák és feladatok

a)

α

1. Írjuk fel az

$$y = \operatorname{tg} x$$

függvény *Mac Laurin*-sorának 6-ik szeletét!

Megoldás:

$$y(0) = 0; \quad \frac{dy}{dx} = 1 + y^2; \quad y'(0) = 1 + 0 = 1;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(1 + y^2) = 2yy'; \quad y''(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0; \text{ stb.}$$

$$T_5(x)\,(= T_6(x)) = 1\frac{x}{1!} + 2\frac{x^3}{3!} + 16\frac{x^5}{5!} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5.$$

2. Határozzuk meg az

$$y = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát! Használjuk fel – de igazoljuk –, hogy

$$y^{(n)} = e^{x\cos\alpha}\cos(n\alpha + x\sin\alpha).$$

3. Határozzuk meg az

$$y = e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát!

4. Írjuk fel az

$$y = \operatorname{arctg} x$$

függvény *Mac Laurin*-sorát, felhasználva – de igazolva –, hogy

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

5. Írjuk fel az

$$y = \sqrt{1 - \operatorname{th} x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorának 4-ik szeletét.

6. Írjuk fel az

$$y = \sqrt{\sec x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorának 3-ik szeletét.

7. Írjuk fel az

$$y = \sqrt{\cos x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorának 5-ik szeletét.

8. Írjuk fel az

$$y = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x + 1}$$

függvény *Mac Laurin*-sorának 4-ik szeletét.

9. Írjuk fel az

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény *Mac Laurin*-sorának 5-ik szeletét.

β

1. Írjuk fel az

$$y = e^{-x^2}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

2. Írjuk fel az

$$y = \cos^2 x$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

Megoldás:

$$y = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Így tehát a $z = 2x$ helyettesítéssel:

$$T_{\cos^2 x} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos z\Big|_{z=2x} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left\{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-+\ldots\Big|_{z=2x}\right\} =$$

$$= 1-x^2+\frac{2^3 x^4}{4!}-\frac{2^5 x^6}{6!}+\frac{2^7 x^8}{8!}-+\ldots+(-1)^k\frac{2^{2k-1}x^{2k}}{(2k)!}\pm\ldots.$$

3. Előállítandó az

$$a)\ y = \frac{1}{a-bx}, \quad \text{illetve a} \quad b)\ y = \frac{1}{a+bx}$$

függvény $\left(|x| < \frac{a}{b}\right)$ *Mac Laurin*-sora!

4. Írjuk fel az

$$y = \frac{1}{(1-x)^m}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát!

5. Írjuk fel az

$$y = (a+x)^n$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

6. Határozzuk meg az

$$y = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

7. Írjuk fel az

$$y = 10^x$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

8. Írjuk fel az

$$y = {}^b\log(1+x)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

9. Írjuk fel az

$$y = \sin^2 x$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

10. Adjuk meg az

$$y = \ln(a+x)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát ($a > 0$).

11. Határozzuk meg az

$$y = \ln\frac{a+x}{a-x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát ($a > 0$).

12. Írjuk fel az

$$y = \sqrt[3]{e^x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

13. Írjuk fel az

$$y = \ln(3+4x-5x^2)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

14. Írjuk fel az

$$y = \cos\left(\sqrt{x}+1{,}4x^{\frac{3}{2}}\right)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

15. Írjuk fel az

$$y = \operatorname{ch}(x+2x^2)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

γ

1.

$$y = \arcsin x.$$

Adjuk meg a függvény *Mac Laurin*-sorát.

Megoldás:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

ha tehát $|x^2| < 1$, azaz $|x| < 1$, akkor:

$$\frac{dy}{dx} = 1+\binom{1}{-\frac{1}{2}}(-x^2)+\binom{2}{-\frac{1}{2}}(-x^2)^2+\binom{3}{-\frac{1}{2}}(-x)^{23}+\ldots.$$

$\binom{n}{-\frac{1}{2}}$-t alakítsuk át ilyen módon:

$$\binom{n}{-\frac{1}{2}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} =$$

$$= \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2\cdot n} = (-1)^n\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} =$$

$$= (-1)^n\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Ezzel:

$$\frac{dy}{dx} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots \quad (|x|<1).$$

A $\frac{dy}{dx}$ hatványsora a $-1\leqq x\leqq 1$ tartomány bármely belső résztartományában egyenletesen konvergens (1. § *b)*), ezért ott tagonként integrálható:

$$T_{\arcsin x}(x) = \int \frac{dy}{dx}\,dx = C+x+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5}+\ldots+$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

Ez a hatványsor a $-1<x<1$ nyílt köz bármely belső zárt részintervallumán egyenletesen konvergens, a differenciálhányadosa $\frac{dy}{dx}$ szintén egyenletesen konvergens a $-1<x<1$ nyílt köz bármely belső zárt részintervallumán. Az $x=0$ helyen az $\arcsin x$ függvény minden differenciálhányadosának értéke megegyezik a $T(x)$ függvény differenciálhányadosaival. Ezenkívül $T(0)=C$; $\arcsin 0 = 2k\pi$; ha tehát $C=2k\pi$-nek választjuk, akkor $T(0)=\arcsin 0$. Mivel pedig az $x=0$ helyen $\arcsin x$ hatványsorba fejthető (l. 2. § γ) 14. és δ) 1—6. feladatokat, azért:

$$T_{\arcsin x}(x) = \arcsin x = 2k\pi+x+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

$$(|x|<1).$$

Feladatként igazoljuk még, hogy a sor az $x=\pm 1$ helyeken is konvergens!

2.

$$y = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Számítsuk ki a függvény *Mac Laurin*-sorát!

Megoldás:

$$Y(x) = \int y(x)\,dx = \frac{1}{1-x}+C = C+\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad (|x|<1) \quad y = \frac{dY}{dx}.$$

$y(x)$ tehát formálisan differenciálással előállítható. Az így kapott sor azonban csak egyenletes konvergencia tartományában állítja elő az $\frac{1}{(1-x)^2}$ függvényt!

Formálisan tehát:

$$T(x) = \frac{dY}{dx} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k.$$

A fenti sorban $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n-1}|x|$. Ha tehát $|x| < 1$, a sor konvergens, ha $|x| \geqq \geqq 1$, a sor divergens. A konvergenciaköz sugara: $r = 1$ (de egyik végpontban sem konvergens már a sor!)

Ezen intervallum bármely belső intervallumában a hatványsor egyenletesen konvergens (1. § *b)* 2. feladat), ezért

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k; \quad (|x| < 1).$$

3. Határozzuk meg az

$$y = \frac{x}{(1+x^2)}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

4. Határozzuk meg az

$$y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát!

5. Írjuk fel az

$$y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

*Megoldás:**

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = C + \int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = C - \int \frac{dx}{1+x^2}.$$

A számolást az olvasóra bízzuk; megjegyezzük, hogy

$$C = \lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi; \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

* Megjegyezzük, hogy az $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ egyenlőség alapján $\operatorname{arctg} x$ *Mac Laurin*-sorából közvetlenül is adódik $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ *Mac Laurin*-sora.

6. Határozzuk meg az

$$y = \ln(1+x)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

7. Állítsuk elő az

$$y = \arccos x$$

függvényt az $x = 0$ hely környezetében definiáló hatványsort.

8. Írjuk fel

$$y = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

Mac Laurin-sorát.

9. Írjuk fel az

$$y = \operatorname{arth}\frac{1}{x}; \quad y = \operatorname{arsh} x; \quad y = \operatorname{arth} x$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

δ

1. Számítsuk ki az

$$y = \cos x \cdot e^{x^2}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

Megoldás:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \ldots$$

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

Mindkét sor minden x értéknél konvergens, azaz minden x értéknél abszolút konvergens. A két sor szorzatát tehát rendezhetjük *Cauchy*-féle módon:

$$y = \cos x \cdot e^{x^2} = \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots\right]\left[1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \ldots\right] =$$

$$= 1 + x^2\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + x^4\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{1!\,2!} + \frac{1}{4!}\right) + \ldots +$$

$$+ x^{2n}\left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{2!\,(n-1)!} + \frac{1}{4!\,(n-2)!} - + \ldots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!\,(n-m)!} + \right.$$

$$\left. \pm \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!\,1!}\right] + \ldots$$

2. Határozzuk meg az

$$y = \operatorname{tg} x$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

Megoldás:

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \dots}.$$

A számlálóban, illetve a nevezőben felírt sor x minden értékénél abszolút konvergens. A nevező azonban az $x = \pm (2k+1)\frac{\pi}{2}$ helyeken a 0 értéket veszi fel, ezért a sorok hányadosa csak az $|x| \leqq \frac{\pi}{2}$ közön belül konvergálhat. Minthogy az $y = \operatorname{tg} x$ függvény anlitikus a $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ szakaszon, *Mac Laurin*-sora valamely pozitív $\left(\text{és a fentiek szerint } \frac{\pi}{2}\text{-nél nem nagyobb}\right)$ sugarú közön feltétlenül konvergál. Hogy az osztással nyert hatványsor valóban a $\operatorname{tg} x$ függvény *Mac Laurin*-sora, azt a következőképpen lehet belátni: az eredményül nyert hatványsort a $\cos x$ hatványsorával *Cauchy*-módon összeszorozva, eredményül a $\sin x$ hatványsorát kapjuk (ez az osztás módjából következik). Minthogy azonban eleve azt sem tudjuk, hogy az osztásnál nyert hatványsor az $x = 0$ hely kivételével valahol is konvergál-e, a bizonyítást még nem zárhatjuk (hogy ti. egy abszolút konvergens és egy divergens sor *Cauchy*-szorzata abszolút konvergens sort is adhat, arra feladatunk is példát szolgáltat; a kapott hatványsor ti. az $|x| > \frac{\pi}{2}$ értékekre nem lehet konvergens, $\cos x$-szel szorozva mégis a mindenütt abszolút konvergens $\sin x$ függvényt állítja elő). Ha azonban meggondoljuk, hogy a $\operatorname{tg} x$ függvény — fentiek szerint feltétlenül létező, és valamilyen közön abszolút konvergens — *Mac Laurin*-sorát $\cos x$ sorával szorozva, eredményül szükségképp $\sin x$ *Mac Laurin*-sorát kell kapnunk, főleg pedig azt, hogy hatványsorok *Cauchy*-féle szorzásánál a szorzatsor k-adik együtthatója mindkét tényezősor első k együtthatójától függ csak, e két tény alapján együtthatóról együtthatóra igazolhatjuk, hogy az eredményül kapott hatványsor együtthatói azonosan megegyeznek a $\operatorname{tg} x$ függvény *Mac Laurin*-sorának együtthatóival.

$$\begin{array}{l}
x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots : \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \dots\right) = \\
\underline{x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + - \dots} \qquad\qquad = x + x^3\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \dots \\
\quad x^3\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) - x^5\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + - \dots \\
\quad \underline{x^3\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) - x^5\left(\frac{1}{(2!)^2} - \frac{1}{2!\,3!}\right) + - \dots} \\
\quad - \qquad\qquad + \qquad\qquad - +
\end{array}$$

Hogy a sor konvergenciasugara épp $\frac{\pi}{2}$, azt a 6. § γ) 17. feladata alapján láthatjuk be.

3. Írjuk fel az

$$y = \frac{\cos x}{1+x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

4. Írjuk fel az

$$y = \frac{\ln(1+x)}{\cos x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

5. Határozzuk meg az

$$y = (\arcsin x)^2$$

$x = 0$ hely körüli hatványsorát.

6. Írjuk fel az

$$y = e^x \sin x, \text{ illetve } y = e^{-x} \sin x$$

függvények $x = 0$ hely körüli hatványsorát.

7. Adjuk meg hatványsor alakjában az

$$y = \sqrt{\frac{R+a}{R-a}}$$

függvényt, ha

1. $|a| > |R|$, 2. $|a| < |R|$.

8. Írjuk fel az

$$y = \sqrt{1-x}\ \operatorname{arctg} x$$

Mac Laurin-sorát.

9. Határozzuk meg az alábbi függvények *Mac Laurin*-sorát:

a) $y = e^{-x} \sec x$ *d)* $y = (1+2v)\arcsin v$ *f)* $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\cos x}$

b) $y = e^{-\frac{t}{2}} \sin 2t$ *e)* $y = \frac{\sin \frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}$ *g)* $y = e^x \operatorname{tg} x$

c) $y = (1+x)\cos\sqrt{x}$ *h)* $y = \frac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$.

10. Írjuk fel az alábbi függvények *Mac Laurin*-sorát:

a) $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x = \frac{1}{2}[\operatorname{arctg} x]^2$. *b)* $y = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x \cdot \ln\frac{1+x}{1-x}$.

c) $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2)$.

d) $y = \frac{x}{\ln \frac{1}{1-x}}$.

e) $y = \frac{x^2}{x - \ln(1+x)}$.

f) $y = \frac{1}{2}\ln^2(1-x) = \frac{1}{2}[\ln(1-x)]^2$.

Megoldás: ad *a)* Célszerű először differenciálni a függvényt, mert a geometriai sorral történő szorzás viszonylag egyszerű; rögtön megjegyezzük, hogy a függvény páros; deriváltja tehát páratlan, csak a páratlan indexű együtthatók számításával kell foglalkoznunk:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots \qquad (-1 < x \leqq 1).$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \ldots \qquad (-1 < x < 1).$$

$$\operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \ldots\right] \cdot [1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \ldots] =$$

$$= x - x^3\left(1 + \frac{1}{3}\right) + x^5\left(+1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) -$$

$$- x^7\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \ldots \qquad (-1 < x < 1).$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x = \int \frac{dy}{dx}\,dx = C + \frac{x^2}{2} - x^4\,\frac{1+\frac{1}{3}}{4} + x^6\,\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{6} -$$

$$- + \ldots + (-1)^k x^{2k+2}\,\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2k+1}}{2k+2} \pm \ldots =$$

$$= C + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{1}{2s+1}\cdot\frac{x^{2k}}{2k}; \quad C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 0 = 0.$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{1}{2s+1}\,\frac{x^{2k}}{2k}. \qquad (|x| \leqq 1).$$

1. Határozzuk meg az

$$y = \cos(e^x)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

Megoldás: Az

$$y = \cos z$$

függvény *Mac Laurin*-sora z minden értékére abszolút konvergens. Ugyanígy abszolút konvergens az e^x függvény hatványsora is x minden értékére.

$$y = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \ldots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \pm \ldots =$$

$$= 1 - \frac{e^{2x}}{2!} + \frac{e^{4x}}{4!} - + \ldots + (-1)^k \frac{e^{2kx}}{(2k)!} \pm \ldots$$

Itt a $z = e^{kx}$ *Mac Laurin*-sora is minden x-re abszolút konvergens. A végtelen sor minden tagja sorbafejthető tehát, és formálisan alkalmazhatjuk a nagy átrendezési tételt is:

$$1 = 1$$

$$-\frac{1}{2!}e^{2x} = -\frac{1}{2!} - \frac{2}{2!}x - \frac{2^2}{2!\,2!}x^2 - \frac{2^2}{2!\,3!}x^3 - \ldots - \frac{2^n}{2!\,n!}x^n - \ldots$$

$$\frac{1}{4!}e^{4x} = \frac{1}{4!} + \frac{4}{4!\,1!}x + \frac{4^2}{4!\,2!}x^2 + \frac{4^3}{4!\,3!}x^3 + \ldots + \frac{4^n}{4!\,n!}x^n + \ldots$$

$$-\frac{1}{6!}e^{6x} = -\frac{1}{6!} - \frac{6}{6!\,1!}x - \frac{6^2}{6!\,2!}x^2 - \frac{6^3}{6!\,3!}x^3 - \ldots - \frac{6^n}{6!\,n!}x^n - \ldots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(-1)^{\frac{k}{2}}\frac{e^{kx}}{k!} = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k!} + \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}k}{k!\,1!}x + \ldots + \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}k^n}{k!\,n!}x^n + \ldots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

(k páros szám).

A nagy átrendezési tétel alapján kiszámított hatványsor tehát x minden olyan értékére konvergens lesz, amely értékeknél az átrendezés jogos volt. Ennek, mint tudjuk, elégséges feltétele, hogy az elemek abszolút értékéből alkotott sorok összegének a sora is konvergens legyen. De pl. a k-adik sorban az elemek abszolút értékéből alkotott sor:

$$\frac{1}{(2k)!}+\frac{2k}{(2k)!\cdot 1!}|x|+\ldots+\frac{(2k)^n}{(2k)!\,n!}|x|^n+\ldots$$

összege zárt alakban is közvetlenül felírható; ti. éppen $\frac{e^{2k|x|}}{(2k)!}$-sal egyenlő. A sorösszegekből alkotott sor:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{2k|x|}}{(2k)!}$$

pedig – amint azt könnyen megállapíthatjuk – egyrészt x minden értékére konvergens (másrészt összege zárt alakban is előállítható, ti. ch $(e^{|x|})$-tal egyenlő). A nagy átrendezési tétellel kapcsolatos elégséges feltétel tehát x minden értékére teljesül, a most számítandó sor tehát x minden értékére előállítja a sorbafejtendő függvényt. Az oszloponként végzett összegezés eredménye:

$$y=\cos(e^x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[x^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)^n}{(2k)!\,n!}\right].$$

Már most egyrészt

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}=\cos 1$$

(amit cos x sorbafejtéséből azonnal kiolvashatunk), másrészt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)^n}{(2k)!}=2^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot k^n}{(2k)!}.$$

Ezekkel az értékekkel

$$y=\cos(e^x)=\cos 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2x)^n}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k^n}{(2k)!}\right].$$

2.

$$y=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}-\frac{1}{2+x}\pm\ldots.$$

Írjuk fel a függvény *Mac Laurin*-sorát; állapítsuk meg a konvergenciatartományt.

Megoldás: Vonjunk össze két-két tagot, így a sor lényegesen gyorsabban konvergál:*

$$y=\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2x}{4-x^2}+\frac{2x}{9-x^2}+\ldots+\frac{2x}{n^2-x^2}+\ldots$$

* Az eredeti sor konvergenciatartományában jogos csak ez az eljárás. Könnyen kimutathatjuk azonban, hogy a sor x minden értékére konvergens.

Formálisan tehát:

$$y = 2x\{1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2n}+\ldots\}+$$
$$+\frac{2x}{2^2}\left\{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^4+\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+\ldots\right\}+$$
$$+\frac{2x}{3^2}\left\{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^4+\left(\frac{x}{3}\right)^6+\ldots+\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}+\ldots\right\}+\ldots+$$
$$+\frac{2x}{k^2}\left\{1+\left(\frac{x}{k}\right)^2+\left(\frac{x}{k}\right)^4+\left(\frac{x}{k}\right)^6+\ldots+\left(\frac{x}{k}\right)^{2n}+\ldots\right\}+\ldots$$

Könnyen igazolhatjuk, hogy $|x|<1$ esetén a sorok abszolút konvergensek, tehát konvergens $\frac{2x}{n^2}$-szorosuk is. De kielégül a nagy átrendezési tétellel kapcsolatos elégséges feltétel is $|x|<1$ esetben. Némi számolással meggyőződhetünk róla ugyanis, hogy a sortagok abszolút értékeiből képezett sorösszegek összege is konvergens (hiszen minden tag amúgy is pozitív, a szorzót kivéve, amely x-szel váltja előjelét), tehát az összegezést oszloponként is végezhetjük a nagy átrendezési tétel értelmében (legalább $|x|<1$ esetére). Ennek következtében nemcsak az oszlopokból alkotott végtelen sorok konvergensek, hanem az így kapott összegek sora is. Így tehát:

$$y = 2x\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+x^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}+\ldots+x^{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k+2}}+\ldots\right\}=$$
$$=2x\sum_{k=0}^{\infty}\left[x^{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k+2}}\right].$$

3. Fejtsük sorba az

$$y = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2-n^2}$$

függvényt.

4. Írjuk fel az

$$y = e^{\sin x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

5. Írjuk fel

$$y = \frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{t}{\sin t}-1\right)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

6. Fejtsük *Mac Laurin*-sorba az

$$y = e^{e^x}$$

függvényt.

7. Állítsuk elő az

$$y = e^x$$

függvény görbületét mint az ordináta, illetve mint az abszcissza függvényét: a

$$g = g(y), \text{ illetve } g = g(x)$$

függvényt, és adjuk meg mindkét függvény *Mac Laurin*-sorát és a konvergenciatartományokat.

8. Határozzuk meg az

$$y = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)$$

függvény *Mac Laurin*-sorának kilences indexű szeletét.

ζ

1. Fejtsük az

$$y = e^{x^2-3x+5}$$

függvényt *Mac Laurin*-sorba.

Megoldás: Az exponenciális függvénnyel kapcsolatos addíciós tételt használva:

$$y = e^{x^2} \cdot e^{-3x} \cdot e^5 .$$

y fenti, több tényezős előállításában szereplő e^{x^2} és e^{3x} *Mac Laurin*-sora minden x-re abszolút konvergens, ezért a részletszorzatokat *Cauchy*-módon rendezhetjük, és a szorzat is minden x-re abszolút konvergens lesz:

$$y = e^5 \left\{1 - \frac{3}{1}x + \frac{3^2}{2!}x^2 - \frac{3^3 x^3}{3!} + - \ldots\right\}\left\{1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots\right\} =$$

$$= e^5\{1 - 3x + 5{,}5x^2 - 7{,}5x^3 + 8{,}375x^4 \pm \ldots\}.$$

2. Az

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2zx + 1}} \qquad (|z| \geqq 1).$$

függvényt fejtsük *Mac Laurin*-sorba. Határozzuk meg a sorfejtést $|z| < 1$ esetében is.

Megoldás: A nevezőben a gyök alatt szereplő másodfokú kifejezést két elsőfokú szorzatára kell bontanunk, hogy a binominális tétel segítségével elvégezhessük egyszerűen a sorfejtést.

$$x^2 - 2zx + 1 = (x-z)^2 - (z^2 - 1) = (x-z)^2 - \left[\sqrt{z^2-1}\right]^2 =$$

$$= \left[x - z + \sqrt{z^2-1}\right]\left[x - z - \sqrt{z^2-1}\right] =$$

$$= \left[x + \left(\sqrt{z^2-1} - z\right)\right]\left[x - \left(\sqrt{z^2-1} + z\right)\right].$$

Ezzel

$$y = \frac{1}{\sqrt{x + \left(\sqrt{z^2-1} - z\right)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x - \left(\sqrt{z^2-1} + z\right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{z^2-1}-z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{z^2-1}+z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{z^2-1}-z}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{\sqrt{z^2-1}+z}-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{\sqrt{z^2-1}-z}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{\sqrt{z^2-1}+z}}}.$$

Fenti szorzatot, melyben mindkét tényező sora abszolút konvergens a $[\sqrt{z^2-1}-z] < x < -[\sqrt{z^2-1}-z]$-ben, ha z pozitív és egynél nagyobb, illetve $+[\sqrt{z^2-1}+z] < x < -[\sqrt{z^2-1}+z]$-ben, ha z negatív és -1-nél kisebb, tényezőként sorbafejtve és összeszorozva:

$$\left\{1+\binom{-\frac{1}{2}}{1}\frac{x}{\sqrt{z^2-1}-z}+\binom{-\frac{1}{2}}{2}\frac{x^2}{(\sqrt{z^2-1}-z)^2}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\binom{-\frac{1}{2}}{k}\frac{x^k}{(\sqrt{z^2-1}-z)^k}+\ldots\right\}\cdot\left\{-\binom{-\frac{1}{2}}{1}\frac{x}{\sqrt{z^2-1}+z}+\right.$$

$$\left.+\binom{-\frac{1}{2}}{2}\frac{x^2}{(\sqrt{z^2-1}+z)^2}\pm\ldots+(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k}\frac{x^k}{(\sqrt{z^2-1}+z)^k}\pm\ldots\right\}=$$

$$= 1+zx+\frac{3z^2-1}{2}x^2+\frac{5z^3-3z}{2}x^3+\ldots$$

A sor az $|x| < |\sqrt{z^2-1}-z|$, ha $z \geqq 1$, illetve

$|x| < |z+\sqrt{z^2-1}|$, ha $z \leqq -1$,

értékekre konvergens! Határozzuk meg hasonlóan a sorfejtést és a konvergenciatartományt $|z| < 1$ esetben!

3. Határozzuk meg az

$$y = \frac{5-2x}{6-5x+x^2}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát, részlettörtekre bontással.

4. Határozzuk meg az

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát!

Megoldás:

$$y = x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \text{ illetve } y = \frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

Az utóbbi alak alapján (kissé körülményesebben) számolva:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1} x + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^2 + \ldots + \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k + \ldots (|x| < 1;\ x = 1).$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} x + \binom{-\frac{1}{2}}{2} x^2 + \ldots + \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^k + \ldots (|x| < 1;\ x = 1).$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} - (1+x)^{-\frac{1}{2}} = x(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \quad (-1 < x \leqq 1.)$$

$$= x - \frac{1 \cdot (3+1)}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3 (5+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 (7+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 - + \ldots =$$

$$= x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^4 - + \ldots + (-1)^{k+1} \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} x^k + \ldots +$$

Tehát

$$y = x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} x^k;\ -1 < x \leqq 1.$$

5. Írjuk fel az

$$y = \frac{1+x}{1-x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát!

6. Írjuk fel az

$$y = \sin^3 x$$

és az

$$y = \cos^4 x$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

7. Írjuk fel az

$$y = \cos (a+x)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

Megoldás:

$$y = \cos (a+x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x.$$

$$y \equiv \cos a - x \sin a - \frac{x^2}{2!} \cos a + \frac{x^3}{3!} \sin a + \frac{x^4}{4!} \cos a - - + + \ldots$$

8. Írjuk fel az

$$y = (x+h)^n$$

függvénynek a $h = 0$ helyre vonatkozó *Taylor*-sorát!

Megoldás:

Itt h-t és nem x-et tekintjük változónak!

$$y = x^n\left(1+\frac{h}{x}\right)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{4-2}h^2 + \ldots$$

9. Határozzuk meg az

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

függvény *Mac Laurin*-sorának 3 indexű szeletét.

10. Mi a

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$$

függvény *Mac Laurin*-sora?

11. Írjuk fel az

$$y = \frac{x^2-3x+5}{4x^4-12x^2+5}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

12. Írjuk fel az

$$y = \cos(3+x)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

13. Írjuk fel az

$$y = \operatorname{sh}(4-x)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

η

1. $y = \operatorname{tg} x$, illetve $z = \operatorname{th} x$.

Írjuk fel a függvények *Mac Laurin*-sorát, felhasználva, hogy

$$y' = (1+y^2), \text{ illetve}$$
$$z' = (1-z^2).$$

Megoldás (csak a $\operatorname{tg} x$ sorfejtését mutatjuk be): Írjuk fel formálisan az $y = \operatorname{tg} x$ függvény *Mac Laurin*-sorát:

$$y = \operatorname{tg} x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots .$$

Ezen sor konvergenciatartományának bármely belső résztartományában abszolút konvergens, ezért ott négyzetre emelhető; másrészt tagonként differenciálható,

mert az így kapott hatványsor konvergenciaköze megegyezik az eredeti függvényével, és mindkét sor a konvergenciaköz bármely belső résztartományában egyenletesen konvergens (hatványsorok!)

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots$$

$$1 + y^2 = 1 + a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (2a_0 a_2 + a_1^2) x^2 + (2a_0 a_3 + 2a_1 a_2) x^3 +$$
$$+ (2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2) x^4 + \ldots .$$

Az

$$y' \equiv 1 + y^2$$

azonosság csak akkor állhat fenn, ha mindkét oldalon egyenlőek az x egyező hatványaihoz tartozó együtthatók (2 § δ) 1. feladat).

$a_0 = \operatorname{tg} 0 = 0$. $\quad 1 + a_0^2 = a_1$; ebből $a_1 = 1$. $\quad 2a_0 a_1 = 2a_2$; $a_2 = 0$.

$2a_0 a_2 + a_1^2 = 3a_3$; $a_3 = \frac{1}{3}$. $\quad 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 = 4a_4$; $a_4 = 0$.

$$2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2 = 5a_5; \; a_5 = \frac{2}{15}.$$

A pontos konvergenciatartományt nehéz megállapítani a sorfejtésből, mert nem ismerjük az általános tagot. Az azonban könnyen igazolható, hogy egyik együttható sem nagyobb egynél, ezért $|x| < 1$ esetre bizonyára konvergens a sor, itt bizonyára nem formális a számítás.

2.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Állapítsuk meg az itt megadott hatványsor inverz függvényét (szintén hatványsor alakjában), azaz adjuk meg x-et y hatványsorával. (Feltételezve, hogy $a_1 \neq 0$, azaz $y'(x) \neq 0$ az $x = 0$ helyen.)

*Megoldás:** Elsősorban is megjegyezzük, hogy a feladatot mindig vissza lehet vezetni arra a speciális esetre, amikor $a_0 = 0$ (azaz $y(0) = 0$), és $a_1 = 1$ (azaz $y'(0) = 1$); ezáltal a konkrét számításoknál lényegesen csökken a numerikus munka, ebben az elvi levezetésben pedig az írásmunka. Általában persze

$$y(0) = a_0, \text{ és } y'(0) = a_1 \neq 0.$$

Vezessük azonban be az

$$Y = \frac{y - a_0}{a_1}$$

új függő változót. A $Y(x)$ függvény *Mac Laurin*-sora $y(x)$-ből kivonással és osztással közvetlenül adódik:

* A komplexfüggvény-tanra támaszkodva, ez a probléma is sokkal egyszerűbben oldható meg a *Lagrange*-féle megfordítósorral. L. pl. *Szász Pál:* Differenciál és integrálszámítás. II. 565. oldal.

$$Y(x) = 0 + x + \frac{a_2}{a_1}x^2 + \frac{a_3}{a_1}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{a_1}x^n + \ldots =$$
$$= x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n + \ldots .$$

Meghatározva az $Y(x)$ inverz függvényét:

$$x(Y) = c_0 + c_1 Y + c_2 Y^2 + \ldots + c_n Y^n + \ldots$$

-t, majd a visszahelyettesítést és a műveleteket elvégezve, nyerjük az $x(y)$ függvény hatványsorát.

Maga az összefüggés a b_i-k és c_i-k között formálisan igen könnyen felírható. Felhasználjuk ugyanis azt a tényt, hogy

$$x[Y(x)] \equiv x$$

(azaz, ha egy változón valamely függvényoperációt, de az inverzét is végrehajtjuk, nem tettünk semmit); ez sorelméleti nyelven annyit tesz, hogy a

$$c_0 + c_1 Y + c_2 Y^2 + \ldots$$

hatványsorba helyettesítve $Y(x)$ sorát, és x hatványai szerint rendezve, x-et kell megkapnunk. Ez elegendő egyenletet szolgáltat az együtthatók megállapítására, de amit tettünk, mindaddig formális, amíg nem igazoljuk, hogy $x(Y)$ is analitikus az $Y = 0$ helyen. (Ha ti. ezt is igazoltuk, akkor alkalmazhatjuk a 2. § γ) 14. feladatában kimondott tételt, azaz átrendezhetünk.)

Lássuk először a számítások formális részét:

Először is megállapítjuk, minden helyettesítést megelőzve, hogy

$$c_0 = x(Y = 0) = 0$$

és

$$c_1 = \left.\frac{dx}{dY}\right|_{Y=0} = \frac{1}{\left.\frac{dY}{dx}\right|_{Y=0}} = \frac{1}{\left.\frac{dY}{dx}\right|_{x=0}} = 1,$$

azaz

$$x = Y + c_2 Y^2 + c_3 Y^3 + \ldots$$

Így tehát

$$x \equiv (x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots) + c_2 (x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots)^2 +$$
$$+ c_3 (x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots)^3 + \ldots .$$

A műveleteket végrehajtva és átrendezve:

$$x \equiv x + x^2 (b_2 + c_2) + x^3 (b_3 + 2c_2 b_2 + c_3) +$$
$$+ x^4 (b_4 + 2c_2 b_3 + c_2 b_2^2 + 3c_3 b_2 + c_4) + \ldots .$$

Felhasználva a 2. § δ) 1. feladatának eredményét, amely szerint két hatványsor csak akkor lehet egyenlő, ha valamennyi együtthatójuk egyenlő, a következő egyenleteket kapjuk:

$$1 = 1; \quad b_2 + c_2 = 0; \quad b_3 + 2c_2 b_2 + c_3 = 0; \ldots$$

miből: $c_2 = -b_2$; $c_3 = -b_3 - 2c_2 b_2 = 2b_2^2 - b_3$;

$$c_4 = -3c_3 b_2 - c_2 b_2^2 - 2c_2 b_3 - b_4 = 5b_2 b_3 - 5b_2^3 - b_4 \ldots .$$

(Megjegyezzük, hogy konkrét esetben nem az általános képleteket szoktuk használni, hanem az adott számokkal elvégezve az itt megadott műveleteket, számítjuk az együtthatókat, mert a numerikus egyenletek megoldása lényegesen egyszerűbb.)

Hátravan még a konvergencia igazolása. Ezt a következő gondolatmenet alapján végezzük:

Kiindulunk egy hatványsorból, amelynek az együtthatói abszolút értékben nem kisebbek az invertálandó hatványsor együtthatóinál. Úgy választjuk meg ezen együtthatók előjelét, hogy az inverz függvény hatványsorának együtthatói is legyenek abszolút értékben nagyobbak, mint a tulajdonképpeni invertálandó függvény inverzének hatványsorára kiadódó együtthatók. Ebből azonnal következik, hogy azon közön, amelyen konvergens a felvett hatványsor inverze, konvergens a tulajdonképpen invertálandó függvény inverzét előállító hatványsor is — minthogy hatványsoroknál az abszolút konvergencia tartományától a feltételes konvergencia tartománya legfeljebb a két határpontban tér el —, a másodiknak felvett sor inverze viszont abszolút értékben majorálja az elsőt. Ha már most ügyesek vagyunk, és az adott követelményeket teljesítő hatványsort meg tudjuk úgy választani, hogy összege zárt alakban is előállítható, akkor ennek az inverziója közvetlenül is elvégezhető, és ebből leolvasható az inverz sor konvergenciatartománya.

Ezt a hatványsort a következőképp konstruálhatjuk meg (pl.):

Válasszunk ki az $Y(x)$-et definiáló *Mac Laurin*-sor konvergenciatartományában egy belső $x = x_0$ pontot. Minthogy az x_0 helyen e hatványsor abszolút konvergens, ezért tagjai abszolút értékben bizonyosan valamely K korlát alatt maradnak e helyen:

$$|b_n x_0^n| \leqq K, \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Így

$$|b_n| \leqq \frac{K}{|x_0|^n}.$$

Már most azt a bizonyos „majoráló" sort válasszuk a következőképp:

$$\eta = x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \ldots + \beta_k x^k + \ldots$$

$$= x - \frac{K}{|x_0|^2} x^2 - \frac{K}{|x_0|^3} x^3 - \ldots - \frac{K}{|x_0|^k} x^k - \ldots .$$

Az együtthatókat azért választottuk -1-nek, mert így az új hatványsor inverzének, az

$$x = \eta + \gamma_2 \eta^2 + \gamma_3 \eta^3 + \ldots$$

hatványsornak minden együtthatója — amint ez az előző oldali formuláinkból kiolvasható, illetve igazolható egyszerűen az előjelek vizsgálatával — a képzési szabálynak megfelelően csak pozitív előjelű tagokból áll, és így fennáll (ismét a háromszögegyenlőtlenség alapján, $|a+b+\ldots| \leqq |a| + |b| + \ldots$) a

$$|c_n| \leqq |\gamma_n| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

egyenlőtlenség is.

Emellett az

$$\eta = Kx - \frac{Kx^2}{|x_0|^2}\left\{1 + \frac{x}{|x_0|} + \frac{x^2}{|x_0|^2} + \ldots + \frac{x^k}{|x_0|^k} + \ldots\right\}$$

sor zárt alakban is előállítható (geometriai sorról van szó), azaz

$$\eta = x - K\frac{x^2}{|x_0|^2}\,\frac{1}{1-\dfrac{x}{|x_0|}} = |x_0|\,\frac{x}{|x_0|} - K\frac{x^2}{|x_0|^2}\,\frac{1}{1-\dfrac{x}{|x_0|}},$$

ha $|x| < |x_0|$. Ebből az egyenletből $\dfrac{x}{|x_0|}$ kifejezhető:

$$x = \frac{|x_0|\,(\eta + |x_0|)}{2(K + |x_0|)} + \frac{|x_0|}{2(K + |x_0|)}\sqrt{(\eta + |x_0|)^2 - 4\eta(K + |x_0|)}\,.$$

Már csak azt a kérdést kell eldöntenünk, hogy analitikus-e ez a függvény az $\eta = 0$ hely körül.

A $\sqrt{x}$ függvény, mint tudjuk, az $x = 0$ hely kivételével mindenütt analitikus (2. § γ) 15. feladat). A két tagból álló

$$x = x(\eta)$$

függvény tehát analitikus az $\eta = 0$ helyen, ha a gyökjel alatt álló mennyiség 0-tól különböző e helyen. De

$$(\eta + |x_0|)^2 - 4\eta(K + |x_0|)\,|_{\eta=0} = x_0^2 \neq 0.$$

Könnyen kiszámíthatjuk azt is, hogy milyen tartományban konvergens az $x = x(\eta)$ *Mac Laurin*-sora. E célból jelöljük az $(\eta + |x_0|)^2 - 4\eta(K + |x_0|) = 0$ egyenlet két gyökét η_1, illetve η_2-vel. Így

$$\sqrt{(\eta + |x_0|)^2 - 4\eta(K + |x_0|)} = \sqrt{(\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2)} =$$

$$= \sqrt{\eta_1 \eta_2}\cdot\sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_1}}\,\sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_2}}\,.$$

Minthogy az

$$(1 + x)^{\frac{1}{2}}$$

függvény *Mac Laurin*-sora az $|x| < 1$ közön konvergens, azért ha a

$$\min\{|\eta_1|; |\eta_2|\} = \eta_3 > 0^*$$ jelölést bevezetjük, az $x = x(\eta)$

függvény *Mac Laurin*-sora az $|\eta| < \eta_3$ közön konvergens. A $|Y| < \eta_3$ közön tehát biztosan konvergens (de lehet, hogy ennél nagyobb közön is) az $x = x(Y)$ függvény *Mac Laurin*-sora is.

* Megjegyezzük, hogy η_1 is, η_2 is pozitív, amint ez a kérdéses másodfokú egyenletre tekintve, közvetlenül belátható, és így

$$\eta_3 = 2K + |x_0| - 2\sqrt{K(K + |x_0|)}\,.$$

3. Határozzuk meg az

$$y = \operatorname{th} x$$

függvény *Mac Laurin*-sorának első öt tagját az inverz függvény hatványsora segítségével, és becsüljük meg a 2. feladat eredményei alapján a konvergencia-intervallumot.

Megoldás: A mellékelt táblázat alapján az első öt együttható könnyen kiszámítható, hiszen transzformációt nem is kell végeznünk, mert

$$x = \operatorname{arth} y = y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \ldots + \frac{y^{2k+1}}{2k+1} + \ldots$$

azaz

$$a_0 = 0 \quad \text{és} \quad a_1 = 1.$$

$$y = \operatorname{th} x = 1 \cdot x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 - + \ldots .$$

A konvergencia-intervallum megállapításához pl. $y_0 = 0{,}99$, de $y_0 = 0{,}9$ választás is megfelelő, utóbbira $K = \frac{1}{3} 0{,}9^3$ előbbire $K = \frac{1}{3} \cdot 0{,}99^3$; általában y_0-hoz $K = \frac{1}{3} |y_0|^3$.

Ezzel $r \geqq \frac{2}{3} |y_0|^3 + |y_0| - \frac{2}{3} \sqrt{|y_0|^6 + 3|y_0|^4} > \frac{2}{3} |y_0|^3 - \frac{3}{4} |y_0|^2 + |y_0|$.

A valóságban a konvergenciaköz sugara: $r = \frac{\pi}{2}$, amit majd a komplex függvénytan ismeretében egész könnyen ki is tudunk számolni.

4. Írjuk fel az

$$y = e^{\operatorname{arc\,tg} x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

Megoldás:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \cdot y; \quad y = (1+x^2) \frac{dy}{dx}.$$

Írjuk fel formálisan a *Mac Laurin*-sort:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots .$$

Ekkor $\frac{dy}{dx}$ formálisan:

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots .$$

A rekurziós formulák sorjában:

$$a_1 = a_0 \qquad 3a_3 + a_1 = a_2 \qquad 5a_5 + 3a_3 = a_4$$
$$2a_2 = a_1 \qquad 4a_4 + 2a_2 = a_3 \qquad 6a_6 + 4a_4 = a_5 .$$

Ezek szerint:

$$a_0 = y(0) = e^0 = 1;\ a_1 = 1;\ a_2 = \frac{1}{2};\ a_3 = -\frac{1}{6};\ a_4 = -\frac{7}{24};\ \ldots$$

Azt aránylag könnyen igazolni tudjuk, hogy $|a_n| < 1$, így $|x| < 1$ esetben bizonyosan nem formális a fenti meggondolás. Ezek szerint

$$y = e^{\operatorname{arctg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{7x^4}{24} + \frac{x^5}{24} + \frac{29x^6}{144} \pm \ldots .$$

5. Írjuk fel az előző példához hasonlóan a megfelelő differenciálegyenletet felhasználva

$$y = e^{\operatorname{ar\,cth} x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát. Megjegyezzük, hogy az így kapott eredményt könnyen ellenőrizhetjük. Hiszen

$$\operatorname{ar\,cth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};\ \text{ezzel pedig}$$

$$y = e^{\operatorname{ar\,cth} x} = e^{\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{1+x}\,(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Utóbbi szorzat mindkét tényezője könnyen sorbafejthető.

6. Írjuk fel az

$$y = \sqrt{\sin x + 1}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

7. Határozzuk meg az

$$y = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

Megoldás:

$$f(0) = 0.$$

Ebből következően

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

a $\ln(1+x)$ és az $\dfrac{1}{1+x}$ *Mac Laurin*-sorának *Cauchy*-szorzata. Emellett:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \pm \ldots = (1+x)\,[a_1 x + a_2 x^2 + \ldots].$$

Ebből az egyenletből

$$a_1 = 1;\ a_2 = -\frac{1}{2} - a_1 = -\left(1 + \frac{1}{2}\right);\ a_3 = \frac{1}{3} - a_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3};\ \ldots;$$

$$a_n = (-1)^{n-1}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right].$$

Ezek szerint:

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^4 + \ldots.$$

A konvergenciatartomány: $-1 < x < 1$.

8. Az előző feladat általánosításaképp igazoljuk, hogy az

$$f(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{1+x}$$

függvény *Mac Laurin*-sora:

$$f(x) = a_0 + (a_0 - a_1)(-1)\cdot x + (a_0 - a_1 + a_2)(-1)^2 \cdot x^2 + \ldots +$$
$$+ (-1)^n (a_0 - a_1 + a_2 - + \ldots + (-1)^n a_n) x^n + \ldots.$$

Állapítsuk meg a konvergenciatartományt is!

9. Határozzuk meg az

$$y = \operatorname{tg} x$$

függvény *Mac Laurin*-sorának első hét tagját, és becsüljük meg a konvergenciaközt.

10. Fejezzük ki az

$$y^2 + \frac{1}{2}e^y + \frac{1}{2}\sin y - \frac{1}{2} = x$$

függvénykapcsolatból $y(x)$ *Mac Laurin*-sorának első öt tagját, és becsüljük meg a konvergenciatartományt.

11. Fejezzük ki az

$$e^u - \cos u = v$$

függvénykapcsolatból az

$$u = u(v)$$

függvény *Mac Laurin*-sorának első öt tagját, és becsüljük meg a hatványsor konvergenciatartományát.

Határozzuk meg a kapott hatványsor segítségével az $u(0{,}1)$-et, azaz a $v = 0{,}1$ értékhez tartozó függvényértéket, és becsüljük a hibát.

b) A Taylor-sorok számítástechnikája

α) A közvetlen számítás | L. a feladatokat és példákat.

β) A függvény sajátságainak és ismert Mac Laurin-soroknak felhasználása | A *Taylor*-sorokat igen gyakran közvetlenül származtatni tudjuk ismert *Mac Laurin*-sorfejtésekből. Maga az eljárás egyszerű: Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvényt az $x = a$ helyen sorba kell fejtenünk. Ekkor az $x \equiv (x-a)+a$ transzformációt elvégezzük, és az $f[(x-a)+a]$ függvényt – amennyiben az f függvény addiciós tételét ismerjük – átírjuk ennek segítségével $\varphi(x-a)$ alakba. Tehát első lépésként elvégeztük az

$$f(x) \equiv \varphi(x-a)$$

azonos transzformációt. A φ függvény *Mac Laurin* sora ekkor azonnal szolgáltatja (a 3. § *a) β)* részben elmondottak szerint) az $f(x)$ függvény *Taylor*-sorát.

Polinomok esetében a gyöktényezős felírás, racionális törtfüggvények esetében a részlettörtekre-bontás nagyon megkönnyíti az említett azonos transzformáció végrehajtását.

γ) Áttérés transzformációval | Bármely $x = x_1$ helyen felírt *Taylor*-sorról át tudunk térni olyan $x = x_2$ helyen felírt *Taylor*-sorra, amely x_2 hely benne van az eredeti *Taylor*-sor konvergenciatartományában; csak a következő átalakítást kell elvégeznünk:

$$x - x_1 = [(x_2 - x_1) + (x - x_2)].$$

Feladatként az

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_1)^n$$

hatványsort transzformáljuk az $x = x_2$ helyre:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_2)^n .$$

Igazoljuk a következő összefüggést:

$$b_k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} (x_2 - x_1)^n .$$

Feladatként igazoljuk azt is, hogy – amennyiben az eredeti hatványsor konvergenciaközének sugara r_1, az $|x_2 - x_1|$ távolságot pedig t-vel jelöljük ($t < r_1$), akkor az új *Taylor*-sor konvergenciaközének sugara: $r_2 \geqq r_1 - t$.

A fentiekből egyébként az is látható, hogy ez a transzformációs képlet a gyakorlat számára túl komplikált; hiszen az együtthatók, mint sorösszegek igen nehezen számíthatók. Ha azonban az $(x_2 - x_1)$ különbség elég kicsi, igen jó – a gyakorlatnak már teljesen megfelelő – közelítést kapunk, ha a sornak néhány tagját vesszük csak figyelembe az összegezésnél; ekkor azonban becsülnünk kell a sornak az együtthatók pontatlan megállapításából származó hibáját is.

Példák és feladatok

α

A *Mac Laurin*-sorokhoz hasonlóan a *Taylor*-sorokat is fel tudjuk írni a függvény és közvetlenül kiszámított differenciálhányadosai segítségével.

1. Írjuk fel az

$$y = \operatorname{tg} x$$

függvény $a = \frac{\pi}{4}$ helyhez tartozó *Taylor*-sorának első öt tagját és a maradéktagot.

2. Írjuk fel az

$$y = x^5 - x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x - 10$$

függvény $a = 1$ helyhez tartozó *Taylor*-polinomját.

3. Határozzuk meg az

$$y = 2 + x^2 - 3x^5 + 7x^6$$

függvény $a = 1$ helyhez tartozó *Taylor*-polinomját.

4. Írjuk fel az

$$y = \operatorname{th} x$$

függvény *Taylor*-sorának első 4 tagját az $x = 1$ helyen.

5. Határozzuk meg az

$$y = \ln \cos x$$

függvény *Taylor*-sorának 4 indexű szeletét az $x = \frac{\pi}{4}$ helyen.

β

1. Fejtsük *Taylor*-sorba az $a = 3$ helyen az

$$y = \sin x$$

függvényt.

Megoldás: Az $a = 3$ helyen felírt *Taylor*-sor $(x-3)$ hatványait tartalmazza. Ezért így alakítjuk át a függvényt:

$$y = \sin x = \sin[(x-3)+3] = \cos 3 \sin(x-3) + \sin 3 \cos(x-3) =$$

$$= \cos 3 \left\{(x-3) - \frac{(x-3)^3}{3!} + \frac{(x-3)^5}{5!} - + \ldots + (-1)^n \frac{(x-3)^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \ldots\right\} +$$

$$+ \sin 3 \left\{1 - \frac{(x-3)^2}{2!} + \frac{(x-3)^4}{4!} - + \ldots + (-1)^n \frac{(x-3)^{2n}}{(2n)!} \pm \ldots\right\} =$$

$$= \sin 3 + (x-3)\cos 3 - \frac{\sin 3}{2!}(x-3)^2 - \frac{\cos 3}{3!}(x-3)^3 +$$

$$+ + - - \ldots + (-1)^n \frac{\cos 3}{(2n+1)!}(x-3)^{2n+1} + (-1)^{n+1} \frac{\sin 3}{(2n+2)!}(x-3)^{2n+2} \pm \ldots .$$

2. Fejtsük *Taylor*-sorba az

$$\frac{e^x}{\sqrt{x^2-5x+4}}$$

függvényt az $x=-2$ helyen.

Megoldás: A nevezőben levő gyökös kifejezés polinomját szorzattá alakítjuk:

$$y=\frac{e^x}{\sqrt{x^2-5x+4}}=\frac{e^x}{\sqrt{(x-4)(x-1)}}=\frac{e^x}{\sqrt{(4-x)(1-x)}}.$$

Az $x=-2$ helyen felírt *Taylor*-sor $(x+2)$ hatványait kell hogy tartalmazza. A függvényt tehát így alakítjuk át tovább:

$$y=\frac{e^{x+2-2}}{\sqrt{6-(x+2)}\cdot\sqrt{3-(x+2)}}=\frac{e^{-2}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}\,\frac{e^{x+2}}{\sqrt{1-\frac{x+2}{6}}\cdot\sqrt{1-\frac{x+2}{3}}}=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}e^2}\left\{1+\frac{x+2}{1}+\frac{(x+2)^2}{2!}+\frac{(x+2)^3}{3!}+\ldots+\frac{(x+2)^k}{k!}+\ldots\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{1+\binom{-\frac{1}{2}}{1}\left(-\frac{x+2}{6}\right)+\binom{-\frac{1}{2}}{2}\left(-\frac{x+2}{6}\right)^2+\ldots+\binom{-\frac{1}{2}}{k}\left(-\frac{x+2}{6}\right)^k+\ldots\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{1+\binom{-\frac{1}{2}}{1}\left(-\frac{x+2}{3}\right)+\binom{-\frac{1}{2}}{2}\left(-\frac{x+2}{3}\right)^2+\ldots+\binom{-\frac{1}{2}}{k}\left(-\frac{x+2}{3}\right)^k+\ldots\right\}=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}e^2}\left\{1+1{,}25(x+2)+(x+2)^2\left[\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{1}{6^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{72}\right]+\ldots\right\}.$$

3. Írjuk fel az

$$y=\ln x$$

függvény $a=1$ helyhez tartozó *Taylor*-sorát.

4. Írjuk fel az

$$y=e^{\frac{x}{2}}$$

függvény *Taylor*-sorát az $a=4$ helyen.

5. Írjuk fel az

$$y=\frac{3x-4}{4x^2-8x+3}$$

függvény $a=1$ helyen vett *Taylor*-sorát.

6. Írjuk fel a következő függvények $x=a$ helyhez tartozó *Taylor*-sorát:

a) $y=\cos x$; *b)* $y=\sin x$; *c)* $y=e^x$.

7. Írjuk fel a következő függvények $x = a$ $(a > 0)$ helyhez tartozó *Taylor*-sorát:

a) $y = \ln(b+x)$ $(b > a)$;

b) $y = \operatorname{sh} x$; *c)* $y = \operatorname{ch} x$.

8. Írjuk fel a következő függvények $x = a$ helyhez tartozó *Taylor*-sorát:

a) e^{x^2}; *b)* e^{x^2-2x}; *c)* $\sin x\, e^x$; *d)* $\cos x\, e^x$.

9. Írjuk fel a következő függvények $x = a$ helyhez tartozó harmadfokú *Taylor*-polinomját $(b > 0,\ b > |a|)$:

a) $\operatorname{sh} x \cdot \sin x$ *e)* $(a+x)\ln(b+x)$

b) $\operatorname{ch} x \cdot \cos x$ *f)* $\operatorname{ch}(bx+2a)$

c) $\operatorname{sh} x \cdot \cos x$ *g)* $\cos(2bx-3a)$

d) $\operatorname{ch} x \cdot \sin x$ *h)* e^{bx+a}.

γ)

1. A 6. § γ) 17. feladatában meghatározzuk az

$$y = \ln \frac{x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

függvény *Mac Laurin*-sorának együtthatóit.

Határozzuk meg ennek alapján 10^{-3}-nál nem nagyobb hibával a függvény $x = 0{,}1$ helyen vett *Taylor*-sorfejtésének első négy együtthatóját.

2. Határozzuk meg az

$$y = \frac{x\, e^x}{e^x - 1}$$

függvény $x = 10^{-2}$ helyen vett *Taylor*-sorának első öt együtthatóját 10^{-4}-nél nem nagyobb hibával, felhasználva a 6. §-ban megadott sorfejtést.

3. Határozzuk meg az

$$y = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 5x - 3$$

függvény $a = 3$ helyre felírt *Taylor*-polinomját és y (3,01) értékét.

4. Határozzuk meg az

$$y = (x-2)^7 + 3(x-2)^5 - 5(x-2)^3 + (x-2) + 3$$

függvény $a = 5$ helyre felírt *Taylor*-sorát, és y (4,99) értékét.

5. Írjuk fel az

$$y = x^4 + 2x^2 - 3x + 5$$

függvény $x = 1$ helyen vett [$(x-1)$ hatványai szerint haladó] *Taylor*-polinomját és y (0,99)-et.

4. §. A KONVERGENCIAKÖZ ÉS A HIBA VIZSGÁLATÁNAK GYAKORLATI MÓDSZEREI

a) A konvergenciaköz vizsgálata

α) A konvergenciatartomány megállapítása a maradéktag segítségével

A hatványsorok konvergenciájának kérdése tulajdonképpen két kérdés eldöntését jelenti: konvergens-e egyáltalán a sor, s ha igen, vajon melyik függvényhez konvergál?

A 2. § *γ)* 1. feladat eredménye mutatja, hogy egy függvény minden x-re konvergens *Taylor*-sora sem bizonyos, hogy magát a függvényt állítja elő. A két kérdés vizsgálatát azonban összekapcsolja a maradéktag vizsgálata. Azon x értékek összessége, amelyekre a maradéktag (bármelyik alakja) n növelésével a 0-hoz tart, alkotja a konvergenciatartomány azon részét, amelyén a *Taylor*- (illetve *Mac Laurin*-) sor magát a sorbafejtett függvényt állítja elő.

Miután hatványsorok esetén a konvergenciatartomány egy köz, elegendő megvizsgálni, hogy mekkora azon köz sugara, amelyben a maradéktag n növelésével egyenletesen 0-hoz tart. Ebben a tartományban a hatványsor összege magát a függvényt állítja elő; emellett a maradéktag segítségével a polinom és a függvény eltérését is megbecsülhetjük felülről.

β) Konvergenciaköz megállapítása az általános sorelmélet segítségével

Az esetek legnagyobb részében az általános sorelméleti tételek segítségével sokkal könnyebben állapíthatjuk meg a konvergenciaköz sugarát, mint a maradéktag vizsgálatával. Így ugyan nem kapunk választ arra, hogy magát a függvényt állítja-e elő a felírt hatványsor, de egy kis kerülővel erre is gyakran választ tudunk adni. Ha ti. meggyőződünk arról, hogy a sorfejtési helynek egy *akármilyen* kicsiny környezetében a maradéktag még egyenletesen a 0-hoz tart, akkor ebben a környezetben mindenesetre a függvényt állítja elő a felírt *Taylor*-sor. Felhasználva tehát a 2. § *δ)* 6. feladat eredményét, azt mondhatjuk, hogy a felírt *Taylor*-sor azt az analitikus függvényt állítja elő, amely azon a szakaszon, ahol tudjuk a maradéktagról, hogy egyenletesen a 0-hoz tart, azonosan megegyezik a sorbafejtett függvénnyel.*

* Meg kell jegyeznünk, hogy a komplex függvénytan bizonyos igen egyszerű tételei alapján a fenti nehézkes számításokat elkerülhetjük és közvetlenül megadhatjuk a hatványsor konvergenciasugarát. Hogy azonban a két határpontban, hogyan viselkedik a sor, erre a komplex függvénytan nem ad választ.

γ) A konvergenciaköz megállapítása, helyettesítés esetén

A 3. § *a) β)*, illetve *ε)* pontjában olyan eljárást mutattunk be, amelynek segítségével az összetett $f[g(x)]$ függvény *Mac Laurin-*, illetve *Taylor*-sorát a $z = g(x)$ helyettesítéssel számíthattuk. A $g(x)$ függvény közvetlen visszahelyettesítése (ha $g(x)$ maga polinom), illetve *Taylor*-sorának helyettesítése révén (ha a nagy átrendezési tétel alkalmazható) kaptuk a keresett sorfejtést.

Közvetlen visszahelyettesítés esetén a konvergenciaköz azonnal számítható. A

$$g(x) = a$$

egyenlet gyöke (illetve gyökei) adják a konvergenciaköz egyik belső pontját, a két perempontot pedig az $f(z)$ függvény (z-ben felírt) *Taylor-*, illetve *Mac Laurin*-sorának konvergenciaközét határoló z_1, illetve z_2 értékkel felírt $g(x) = z_1$ illetve $g(x) = z_2$ egyenlet gyökei.

Ha $g(x)$ nem polinom és a visszahelyettesítésnél $g(x)$ *Taylor*-sorát helyettesítjük, akkor is meg kell határozni a $g(x) = z_1$ és $g(x) = z_2$ egyenlet gyökeit. Most azonban nem feltétlenül ezek határolják a konvergenciaközt, hanem csak akkor, ha az így számított konvergenciaköz minden belső pontjában jogosan alkalmaztuk a nagy átrendezési tételt.

Példák és feladatok

α

1. Igazoljuk, hogy az

$$y = \operatorname{ch} x$$

függvény $x = a$ helyen felírt *Taylor*-sora mindenütt konvergens.

Megoldás: A Lagrange-féle maradéktagot használjuk fel:

$$r_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}; \quad f^{(n+1)}(\xi) = \begin{cases} \operatorname{ch}\xi, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \operatorname{sh}\xi, & \text{ha } n \text{ páros;} \end{cases}$$

közülük $|\operatorname{ch}\xi| > |\operatorname{sh}\xi|$, ezért

$$|r_n(x)| \leqq \operatorname{ch}\xi\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Jelentsen x bármilyen nagy, de adott értéket. Ekkor a $\operatorname{ch}\xi$ is egy – esetleg igen nagy – adott érték ($a < \xi < x$, illetve $x < \xi < a$).

Tudjuk, hogy

$$K\frac{m^n}{n!} \to 0$$

bármilyen nagy (de még véges) érték legyen is K és m. Ezért $r_n(x) \to 0$ minden x-nél, q.e.d.

2. Határozzuk meg az

$$y = \cos x$$

függvény *Mac Laurin*-sorának konvergenciatartományát.

3. Határozzuk meg az

$$y = e^x$$

függvény $a = 2$ helyen felírt *Taylor*-sorának konvergenciatartományát.

4. Határozzuk meg az $y = \ln(5-0{,}2x)$ függvény *Mac Laurin*-sorának konvergenciatartományát.

β |

1. Állapítsuk meg az általános sorelmélet segítségével a 3. § *a) γ)* 3. feladatban szereplő

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

függvény *Mac Laurin*-sorának konvergenciatartományát.

2. Határozzuk meg az

$$y = (1+x)^\alpha$$

függvény *Mac Laurin*-sorának konvergenciatartományát.

Megoldás: A *Mac Laurin*-sor:

$$1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \ldots$$

alakú. Az 1. § *b)* 3. feladata szerint a konvergenciaköz sugara:

$$r_0 = \underline{\lim}\, \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \underline{\lim}\, \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}}.$$

De

$$\sqrt[n]{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{|\alpha|\,|\alpha-1|\ldots|\alpha-n|}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}}$$

ugyanahhoz a határértékhez tart, amihez a

$$\frac{\dfrac{|\alpha|\cdot|\alpha-1|\ldots|\alpha-n|}{1\cdot 2\cdot \ldots (n+1)}}{\dfrac{|\alpha|\,|\alpha-1|\ldots|\alpha-n+1|}{1\cdot 2\cdot \ldots n}} = \frac{|\alpha-n|}{(n+1)}$$

tört, ha e törtnek van határértéke. (Minthogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, ha utóbbi létezik. L. pl. a B. VI. kötet 1. §-át). Azonnal belátható, hogy a tört az 1 értékhez tart, tehát

$$r_0 = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\binom{d}{n}\right|}} = 1.$$

Tekintsük most az $x = -1$ helyet. Minthogy az együtthatók $n > |\alpha|$-től kezdve váltakozó előjelűek, a sor az $x = -1$ helyen (bizonyos számú tagtól eltekintve a sor elején) pozitív (illetve negatív) tagú sor. A *Gauss*-kritériumot alkalmazva, azt találjuk, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{2\alpha}{n} + \frac{\vartheta_n}{n^2}$ (ahol ϑ_n korlátos sorozat), a sor tehát az $x = -1$ helyen akkor és csakis akkor konvergál, ha $\alpha > \frac{1}{2}$.

Az $x = 1$ helyen a sor (bizonyos számú elől álló tagtól eltekintve) alternáló előjelű. Azonnal belátható, hogy $\alpha \leqq -1$ esetén az együtthatók sorozata nem 0 sorozat, a sor tehát ebben az esetben nem konvergálhat. $\alpha > -1$ esetén az együtthatósorozat abszolút értékben monoton csökkenő; a *Leibniz*-szabály értelmében tehát a sor akkor és csakis akkor konvergál, ha az együtthatósorozat egyszersmind 0 sorozat. Ez pedig valóban bekövetkezik:

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots(n-1)}\right| = \frac{\alpha}{n}\left|1-\frac{\alpha}{1}\right|\cdot\left|1-\frac{\alpha}{2}\right|\ldots\left|1-\frac{\alpha}{n-1}\right|.$$

Ha tehát $\alpha \geqq 0$, akkor a fenti szorzat tényezői, véges számú elől álló tényezőtől eltekintve, 1-nél kisebbek, azaz az $\left|1-\frac{\alpha}{1}\right|\left|1-\frac{\alpha}{2}\right|\ldots\left|1-\frac{\alpha}{n-1}\right|$ szorzat korlátos, tehát $\frac{|\alpha|}{n}$-nel szorozva 0 sorozatot alkot. Ha pedig $-1 < \alpha < 0$, akkor

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right| = \frac{|\alpha|}{n}\left(1+\frac{|\alpha|}{1}\right)\left(1+\frac{|\alpha|}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{|\alpha|}{n-1}\right).$$

Így

$$\ln\left|\binom{\alpha}{n}\right| = \ln\frac{|\alpha|}{n} + \ln\left(1+\frac{|\alpha|}{1}\right) + \ln\left(1+\frac{|\alpha|}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{|\alpha|}{n-1}\right).$$

Használjuk fel azt a relációt, hogy ($x > 0$ esetén)

$$e^x > 1+x, \text{ azaz } x > \ln(1+x).$$

Ezzel

$$\ln\left|\binom{\alpha}{n}\right| < \ln\frac{|\alpha|}{n} + \frac{|\alpha|}{1} + \frac{|\alpha|}{2} + \ldots + \frac{|\alpha|}{n-1}.$$

De $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1} < \ln n$. (Az ún. integrálkritérium alapján. L. pl. a B. VI. kötet 2. §-át). Így

$$\ln\left|\binom{\alpha}{n}\right| < \ln\frac{|\alpha|}{n}+|\alpha|\ln n = \ln|\alpha|+(|\alpha|-1)\ln n =$$

$$= \ln(|\alpha|\cdot n^{|\alpha|-1}) = \ln\frac{|\alpha|}{n^{1+|\alpha|}},$$

tehát

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right| < \frac{|\alpha|}{n^{1-|\alpha|}}\ ;\ 0 \leqq \lim_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right| \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha|}{n^{1-|\alpha|}} = 0, \text{ hiszen } 1-|\alpha| > 0.$$

$(1+x)^\alpha$ *Mac Laurin*-sora tehát $\alpha > \frac{1}{2}$ esetén a $-1 = x \leqq 1$ közön, $\frac{1}{2} \geqq \alpha > -1$ esetén a $-1 < x \leqq 1$ közön, $\alpha < -1$ esetén a $-1 < x < 1$ közön konvergál.

3. Igazoljuk az általános sorelmélet segítségével, hogy az

$$y = \operatorname{ch} x$$

függvény *Mac Laurin*-sora x minden értékénél konvergens.

4. Hol konvergens az

$$y = \frac{\cos x}{1+x}$$

függvény *Mac Laurin*-sora?

Megoldás: A sort a 3. § *a) δ)* 3. feladatban a $\cos x$ és az $\frac{1}{1+x}$ függvénye sorának szorzataként állítottuk elő. Az első: x bármely értékénél abszolút konvergens; a második: $|x| < 1$ esetben abszolút konvergens, $|x| \geqq 1$ esetén divergens. Azt tehát a *Cauchy*-féle szorzattétel alapján biztosan állíthatjuk, hogy $|x| > 1$ esetében a sor (abszolút) konvergens. Hogy $|x| \geqq 1$ esetén mi történik a sorral, külön kell megvizsgálnunk. $x = -1$-nél a sorbafejtett függvénynek szakadása van. $|x| > 1$-re és az $x = -1$ helyen tehát nem konvergálhat a sor. Ami az $x = 1$ helyet illeti: Ha a *Mac Laurin*-sorban az x^n együtthatóját a_n-nel jelöljük, a_{2n}-re, illetve a a_{2n+1}-re ezt találjuk:

$$a_{2n} = 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\ ;$$

$$a_{2n+1} = -1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}-+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!},$$

azaz $a_{2n+1} = -a_{2n}$; egyben az is látható, hogy

$$|a_{2n}| = |a_{2n+1}| < 1, \text{ de } |a_{2n}| = |a_{2n+1}| > \frac{1}{2}.$$

Ebből pedig következik, hogy $x = 1$ esetén $a_n x^n$-nek nem 0 a határértéke, tehát $|x| \geqq 1$ esetén a sor divergens.

5. Hol konvergens az

$$y = \frac{\ln(1+x)}{\cos x}$$

függvény *Mac Laurin*-sora?

6. Hol konvergens az

$$y = \sqrt{x^2-1}\cos 3x$$

függvény $x = 4$ helyen felírt *Taylor*-sora?

7. x mely értékeinél konvergens az

$$y = \frac{e^x}{3-x}$$

függvény $x = 1$ helyen felírt *Taylor*-sora?

8. Hol konvergens az

$$y = \frac{x}{e^x+1}$$

függvény *Mac Laurin*-sora?

9. Mi az

$$y = e^{2x^2-8x+5}$$

függvény *Mac Laurin*-sorának konvergenciatartománya?

10. Határozzuk meg a 3. § *a) η)* 5. feladatban ismertetett

$$e^{\operatorname{arth} x}$$

függvény sorának konvergenciatartományát.

Megoldás: A rekurziós formulák alapján igazolhatjuk a következőket:

1. $a_n \to 0$ monoton csökkenően (nem növekvően);
2. $a_{2n} = a_{2n+1}$;
3. $|a_n| > \frac{1}{n}$.

Ennek következtében $|x| < 1$ és $x = -1$ esetében a sor konvergens ($x = -1$ esetében csak feltételesen), $|x| > 1$ és $x = 1$ esetén pedig bizonyosan divergens $\left(x = 1 \text{ esetében majorálja a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ harmonikus sort!}\right)$

11. Adjuk meg az

$$y = 1-2(x-1)+3(x-1)^2-4(x-1)^3+- \ldots$$

sor konvergenciatartományát.

γ

1. Fejtsük *Taylor*-sorba az

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{2-4x}}$$

függvényt az $x = 2$ helyen, és állapítsuk meg a konvergenciatartományt.

Megoldás:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{2-4x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-6-4(x-2)}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}(x-2)}}.$$

A $z = \frac{2}{3}(x-2)$ helyettesítéssel: $y = -\frac{1}{\sqrt[3]{6}}(1+z)^{-\frac{1}{3}}$.

Ezt a függvényt binomiális sorba fejtjük:

$$y = -\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\left\{1 - \frac{1}{3}z + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}z^2 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}z^3 + - \ldots\right\}.$$

A visszahelyettesítést elvégezve:

$$y = -\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\left\{1 - \frac{2}{9}(x-2) + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\cdot\frac{4}{9}(x-2)^2 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\cdot\frac{8}{27}(x-2)^3 + - \ldots\right\}.$$

A binomiális sor a $-1 < z \leqq 1$ tartományban konvergens (4. § *a) β)* 9. feladat) és előállítja a függvényt. Tehát $z_1 = -1$; $z_2 = +1$ a konvergenciatartományt határoló pontok; ezekkel az értékekkel $x = \frac{3z}{2} + 2$, azaz

$$x_1 = \frac{3z_1}{2} + 2 = 0{,}5; \quad x_2 = \frac{3z_2}{2} + 2 = 3{,}5.$$

Tehát az $y = -\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\left\{1 - \frac{2}{9}(x-2) + - \ldots\right\}$ sor a $0{,}5 < x \leqq 3{,}5$ tartományban konvergens. (Megjegyzés: a $\leqq$, illetve $<$ jelet mindig az egymásnak megfelelő értékpárokra szabad csak használni!!)

2. Milyen x értékekre konvergens az

$$y = e^{-x^2}$$

függvény *Mac Laurin*-sora?

3. x milyen értékeire konvergens az

$$y = (a+x)^n$$

függvény *Mac Laurin*-sora?

4. Milyen x értékeknél konvergens az

$$y = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

függvény *Mac Laurin*-sora?

5. x milyen értékeire konvergens az

$$y = \ln \frac{4}{4-x}$$

függvény $x = 1$ helyen felírt *Taylor*-sora?

6. x milyen értékeire konvergens az

$$y = \cos(3-x)$$

függvény $x = -2$ helyen felírt *Taylor*-sora?

7. Milyen intervallumban konvergens az

$$y = e^{2x-3}$$

függvény $x = 1$ helyre felírt *Taylor*-sora?

8. Mely közben konvergens az

$$y = \operatorname{ch}(x^2-2x+1)$$

függvény $x = -1$ helyen felírt *Taylor*-sora?

9.* Mely közön konvergens az

$$y = \cos(\sqrt{x} - 2\sqrt{x^3})$$

függvény *Mac Laurin*-sora? ($x \geqq 0$).

10. Mekkora az

$$y = e^{x^2} \sin 2x$$

függvény *Mac Laurin*-sorának konvergenciasugara?

11. Mely intervallumon konvergens az

$$y = \ln(2-3x+5x^2)$$

függvénynek az $x = 1$ helyen felírt *Taylor*-sora?

12.* Mely intervallumon konvergens az

$$y = \operatorname{ch}^2(\sqrt{x} - x^{3/2})$$

függvény *Mac Laurin*-sora? ($x \geqq 0$).

13. Mi a konvergencia-intervalluma az

$$y = \ln(3+x+x^2)$$

függvény $x = 1$ helyen felírt *Taylor*-sorának?

4. § b) A hibabecslésről

A gyakorlatban sohasem *a végtelen sorral*, hanem annak *valamelyik szeletével számolunk*. Így azonban hibát követünk el, amelyet meg kell tudnunk becsülni. A becslésnél közelítő képet kapunk az elkövetett hibáról — ami természetes is, mert ha pontosan számítani tudnók a hibát, a számított értékkel korrigálva rögtön meg is szüntethetnénk azt.

Még azt is megjegyezzük, hogy legtöbb esetben a hiba előjelének megállapítása túlságosan körülményes lenne, és ezért mellőzzük. *Általában* tehát *a hiba abszolút értékét becsüljük*, éspedig *felülről* becsüljük, nehogy kicsinyítsünk.

A gyakorlatban általában nem *a hiba* abszolút nagysága, hanem a *helyes értékhez viszonyított nagysága az érdekes.*

Ezért pontossági követelményeinket vagy úgy írjuk elő, hogy megadjuk azoknak a számjegyeknek a számát, amelyeknek még pontosaknak kell lenniök, vagy pedig a helyes érték százalékában adjuk meg a maximálisan még megengedett hibát.

α) Hibabecslés a maradéktag-formula alapján

A 2. § γ)-ban láttuk, hogyan használhatjuk fel a maradéktagot annak megbecslésére, hogy az approximált függvényt milyen jól közelítik *Taylor*-sorának egyes szeletei. A maradéktag azonban (illetve ennek a hibabecslésre átírt alakja) csak akkor használható erre a célra, ha könnyen tudjuk becsülni a sorbafejtett függvény magasabbrendű deriváltjai abszolút értékének maximumát.

β) Hibabecslés az általános sorelmélet eredményeinek felhasználásával

Gyakran tudjuk azt, hogy a *Taylor*-sor a tekintett szakaszon konvergens, és az approximált függvényt állítja elő (erre vonatkozóan lásd a 2. § γ) δ) feladatait). A számítások gyakorlati keresztülvitelében azonban nem a *Taylor*-sorra szoktunk támaszkodni, hanem ennek valamelyik szeletével approximáljuk a függvényt.

Amennyiben tehát a sormaradékra, illetve annak abszolút értékére felső korlátot tudunk adni, ez egyben az elkövetett hiba abszolút értékének felső korlátja is. A sormaradéknak, illetve abszolút értékének becslésére általános sorelméleti segédeszközöket vehetünk igénybe.

β_1) *Hibabecslés geometriai sorral történő majorálással. Pozitív tagú sorok esetén* (illetve egyébként a tagok abszolút értékét véve) egy megfelelő n_0 indexű tagtól kezdve a sormaradékot legtöbb esetben geometriai sorral majorálni tudjuk. Az n_0 indexet az a tag határozza meg, amelytől kezdve az egymás után következő tagok hányadosainak mint számsorozatnak van egynél kisebb felső korlátja. Ez a felső korlát lesz a majoráló geometriai sor hányadosa. Az n-edik szelettel számolva — feltéve, hogy $n > n_0$ — az elkövetett hibát annak a geometriai sornak összegével becsüljük, amelynek első tagja a legelső elhagyott tag: a_{n+1}, hányadosa az előbb említett felső korlát.

β_2) *Hibabecslés a Leibniz-szabály segítségével.* Megtörténik, hogy a hatványsor maradéka, amelynek értékét becsülnünk kell, a tekintett $x = x_0$ helyen (illetve a teljes tekintett $x_1 \leqq x \leqq x_2$ intervallumban) alternáló sor, és található olyan

$n_0(x)$ index (ez az n index általában a hely függvénye; gyakran azonban korlátos a tekintett tartományban; ebben az esetben egy közös N_0 felső korláttal számolhatunk), amelyen túl a tagok abszolút értékeiből alkotott sorozat 0-sorozat. Ha a figyelembe vett szelet n indexe n_0-nál nagyobb (a gyakorlatban ez így szokott lenni, mert nem szoktunk megelégedni olyan szelet approximációjával, amelyen túl még növekedő abszolút értékű tagok találhatók), akkor alkalmazhatjuk a Leibniz-szabályt; tehát

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + \frac{1}{2} a_{n+1} (x-x_0)^{n+1}$$

-gyel approximálunk. Az elkövetett hiba pedig előjelre megegyezik

$$\frac{1}{2} a_{n+1} (x-x_0)^{n+1}$$

előjelével, abszolút értéke pedig kisebb, mint ez utóbbinak az abszolút értéke.

Példák és feladatok

α

1. Mekkora szakaszon közelíthető meg bizonyosan az $y = \operatorname{ch} x$ görbe negyedfokú parabolával (az $x = 0$ hely környezetében), ha a hibahatár 1‰?

Megoldás: 1‰-nyi pontosságon azt kell értenünk, hogy a hiba a helyes érték százalékában kifejezve nem nagyobb, mint 0,1%.

A ch x függvény *Mac Laurin*-sora:

$$\operatorname{ch} x \equiv 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$$

A negyedfokú polinom (parabola) tehát, amellyel approximáljuk az eredeti függvényt:

$$T_4(x) = T_5(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

A sorfejtés helye ($x = 0$) és a hibabecslés helye ($x = x = ?$) között a függvény hatodik differenciálhányadosának

$$y^{(6)}(x) = \operatorname{ch} x$$

-nek az abszolút maximuma a $\xi = x$ helyen van, amit a ch x görbe rajzáról azonnal leolvashatunk. (Azért vehettük az $(n+1)$ értékét 6-tal egyenlőnek, mert a $T_4(x)$ megegyezik a $T_5(x)$-szel!) A függvényérték, amelynek százalékában a hibát ki kell fejeznünk, szintén növekszik az $x = 0$ helytől az $x = x$ helyig. A hiba azonban gyorsabban nő, mint az az érték, amelyhez viszonyítjuk – a legnagyobb viszonylagos hibát tehát szintén a $[0, x]$ tartomány peremén, az $x = x$ helyen követjük el.

Követelményeinket tehát így lehet felírni:

$$\frac{1}{1000} > \frac{|r_6(x)|}{\operatorname{ch} x} > \frac{|\operatorname{ch} \xi|_{\max}}{\operatorname{ch} x} \cdot \frac{|x|^6}{6!} \geqq \frac{|x|^6}{6!};$$

ebből

$$x^6 \leqq \frac{720}{1000}\,; \quad |x| \leqq \sqrt[6]{\frac{720}{1000}} \approx 0{,}946721.$$

2. Mekkora szakaszon közelíthető meg az

$$y = e^x$$

függvény 1‰-es hibával *Mac Laurin*-sorának ötödik szeletével?

3. Mekkora szakaszon közelíthető meg biztosan* *Mac Laurin*-sorának harmadik szeletével az

$$y = \frac{1}{\sqrt[5]{32-x}}$$

függvény 0,3%-nál kisebb hibával?

4. A $-1 \leqq x \leqq 1$ szakaszon *Mac Laurin*-sorának mely szeletével közelíthető meg biztosan* az

$$y = e^{-x}$$

függvény 1‰-es hibával?

5. A $-0{,}8 \leqq x \leqq 0{,}8$ szakaszon *Mac Laurin*-sorának mely szeletével közelíthető meg biztosan* az

$$y = \frac{1}{\sqrt[5]{32-x^5}}$$

függvény 0,5‰-nél kisebb hibával?

6. Határozzuk meg cos 175° értékét 0,05‰-es pontossággal.

Megoldás: $\cos 175° = -\cos(180° - 175°) = -\cos 5°$;

$$5° = 5\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{36} = 0{,}08726\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots$$

Ezzel a formulával $T_2(x) = T_3(x)$; $T_4(x) = T_5(x)$ stb. előállítható. A feladat érdekessége, hogy most az $x = 0$ helytől távolodva, a hiba nő, a függvényérték viszont, amihez viszonyítanunk kell a hibát, csökken. Ezért most nem tehetjük meg, hogy a követelményeinket kifejező

$$\frac{0{,}05}{1000} \geqq \frac{|r_{2n}(x)|}{|\cos x|} = \frac{|\cos \xi|_{\max}}{|\cos x|} \cdot \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

* Ezen azt értjük, hogy az alkalmazott becslési mód mellett milyen intervallumot tudunk megadni, ahol a hiba még biztosan kisebb, mint a megadott hibakorlát.

formulában $|\cos x|$-szel egyszerűsítünk (mint az 1. feladatban a $|\mathrm{ch}\, x|$-szel), hanem becsülnünk kell a számláló szóba jövő legnagyobb értékét felülről, illetve a nevező szóba jövő legkisebb értékét alulról.
Pl.:

$$|\cos \xi| \leqq 1; \quad |\cos x| \geqq \frac{1}{2}, \quad \text{ha } 0 \leqq x \leqq 5°.$$

Kis számolás után kiderül, hogy $n = 2$-re már teljesül az egyenlőtlenség, tehát

$$\cos 175° = -\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = -(1 - 0{,}00380772) = -0{,}9961923.$$

7. Számítsuk ki $\ln 27$ értékét 0,1‰-nyi pontossággal.

Megoldás: $\ln 27 = \ln 3^3 = 3 \ln 3$.

$\ln 3$ értékét is 0,1‰-nyi pontossággal kell kiszámítanunk, hogy háromszorosának relatív hibája 0,1‰-nél kisebb legyen.*

Relatíve nagy számok logaritmusának kiszámításánál akkor járunk el ügyesen és helyesen, ha a kérdéses számot 2-es számrendszerben írjuk fel, majd a legelső számjegyet és 2 megfelelő hatványát kiemeljük; a szorzat-logaritmust pedig a tényezők logaritmusának összegére bontjuk.

Jelen példánkban:

$$27 = 3^3; \quad 3 = 2^1 + 1 = 2^1\left(1 + \frac{1}{2}\right);$$

$$\ln 27 = 3 \ln 3 = 3\left[\ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right].$$

$\ln 2$ értékét egyszer s mindenkorra kiszámíthatjuk magunknak az $\ln \frac{1+x}{1-x}$ sor segítségével, $x = \frac{1}{3}$ helyettesítéssel. Itt is megfelel (az $\ln 2$-höz viszonyított) 0,1‰-es pontosság (mert valamely összeg viszonyított hibája nem nagyobb, mint a tagok relatív hibái közül a legnagyobb; l. a B. VIII.* kötetet), éppúgy az $\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ kiszámításánál is, melyet az $\ln(1+x)$ sorából az $x = \frac{1}{2}$ helyen számíthatunk.

Az egyenlőtlenség, melynek $\ln 2$ számításánál fenn kell állnia:

$$\frac{0{,}1}{1000} \geqq \frac{|r_n(x)|}{\left|\ln \frac{1+x}{1-x}\right|} \geqq \frac{\left|\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \ln \frac{1+x}{1-x}\right|_{\max}}{\left|\ln \frac{1+x}{1-x}\right|} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

* Szorzat relatív hibája egyenlő a tényezők relatív hibájának összegével; a 3-as tényező pedig pontos.

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{d^n}{dx^n}\cdot\frac{2}{(1-x)(1+x)}=$$

$$=2\left\{\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\cdot\frac{1}{1+x}-\binom{n}{1}\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}\cdot\frac{1!}{(1+x)^2}+\right.$$

$$\left.+\binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{(1-x)^{n-2}}\cdot\frac{2!}{(1+x)^3}-+\ldots+(-1)^n\frac{1}{1-x}\cdot\frac{n!}{(1+x)^{n+2}}\right\}^*$$

$$\left|\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\ln\frac{1+x}{1-x}\right|<2\cdot(n+1)\cdot\frac{n!}{(1-|x|)^{n+2}}=2\frac{(n+1)!}{(1-|x|)^{n+2}},\text{ ha }|x|<1,$$

illetve finomabb becsléssel, $\left[\text{minthogy }\frac{1}{1-x}\leqq\frac{1}{1+x},\text{ ha }x\leqq 0,\text{ (de }|x|<1)\right]$:

$$\left|\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\ln\frac{1+x}{1-x}\right|\leqq\frac{2\cdot n!}{(1-|x|)^n}\cdot\frac{1}{(1+|x|)},\text{ ha }0<|x|<1.$$

Azaz

$$\frac{0{,}1}{1000}\geqq\frac{2\cdot n!}{\ln 2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}=\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)\cdot\ln 2}.$$

Utóbbi egyenlőtlenség $n=9$ esetében még nem, de $n=10$ esetében már teljesül $\left[\text{az }\ln 2>\frac{1}{2}\text{ becslés felhasználásával}\right]$.

Ezzel

$$\ln 2\cong 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}\right]\cong 0{,}693147.$$

A további számításokat az olvasóra bízva:

$$\ln 27=3\left[\ln 2+\ln 2+\ln\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]=6\ln 2+\ln\frac{3}{4}\approx 3{,}295.$$

8. Határozzuk meg ln 135 értékét 4 tizedesjegy pontossággal.

9. Az

$$y=e^{-x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorának 6 indexű szeletével számolunk! Mekkora az elkövetett hiba maximálisan az $x=0{,}2$; $x=0{,}5$; $x=2$ helyen?

10. Milyen x értékig számíthatjuk biztosan $\sin x$-et egytagú *Taylor*-polinomjával, ha max 1%-os hibát engedünk meg?

Megoldás:

$$0{,}01<\frac{|r_n(x)|}{|\sin x|}\leqq\frac{|\cos\xi|}{|\sin x|}\cdot\frac{|x|^3}{3!}.$$

* A szorzat differenciálhányadosaira vonatkozó *Leibniz*-szabály alapján (A. III. kötet).

hiszen az egytagú *Taylor*-polinom a valóságban másodfokú polinomnak tekinthető. A

$$\frac{|\cos \xi|_{\max}}{|\sin x|} \cdot \frac{|x|^3}{3!}$$

monoton növekedő függvény, a $0 \leqq |x| \leqq \frac{\pi}{4}$ szakaszon. A

$$0{,}01 > \frac{|\cos \xi|_{\max}}{|\sin x|} \cdot \frac{|x|^3}{3!}$$

egyenlőtlenségből pontosan számítani $|x|$-et nem lehet. De nem is szükséges, hiszen csak egy olyan $|x|$ értéket keresünk, mely nem a lehetetlenségig óvatos, de kockázatmentesen megbízható értéket ad. Jelen példában ezek szerint a $|\cos \xi| \leqq 1$ és

$$\left|\frac{x}{\sin x}\right| < \frac{\pi}{2} \approx 1{,}6$$

becsléseket bevezetve a szükségesnél alig óvatosabban, de sok fáradságot megtakarítva számolhatunk;

$$0{,}01 > 1{,}6\frac{|x|^2}{3!}; \quad |x|^2 < \frac{0{,}06}{1{,}6} \approx 0{,}04; \quad |x| \approx 0{,}2.$$

Azaz $|x| < 0{,}2$ radiános $\left(\approx \left(\frac{36}{\pi}\right)^\circ \sim 10^\circ\right)$ szögek esetében a szög színusza helyett magával a szöggel (ti. x nemcsak az elsőfokú *Taylor*-polinom, de a radiánokban mért szög is) számolva, 1%-osnál kisebb a hiba!

β

1. Határozzuk meg ln 3 értékét 3 tizedesjegynyi pontossággal.

Megoldás: ln 3 értékét az

$$\ln \frac{1+x}{1-x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorából számíthatjuk. Az

$$\frac{1+x}{1-x} = 3$$

egyenlőségből ln 3 értékét az $x = \frac{1}{2}$ helyettesítéssel kapjuk.

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right).$$

Ha 3 tizedesjegynyi pontossággal számolunk, a hiba kisebb kell, hogy legyen, mint $\frac{1}{1000}$; ha azonban a harmadik tizedesjegy kikerekítésénél is biztosak akarunk

lenni a helyes érték felől, $\frac{0{,}5}{1000}$-nyi pontossággal kell számolnunk. Megelégszünk azonban az $\frac{1}{1000}$-nyi pontossággal.

Két egymás után következő tag hányadosa: $\frac{x^{2n+1}}{2n+1} : \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{2n-1}{2n+1}x^2$. A hányadosokból alkotott sorozat monoton növekedő, határértéke (és egyben a sorozat legkisebb felső korlátja) x^2. A legelső elhagyott tag: $2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; az elhagyott tagok összegének egyik felső korlátja tehát a következő geometriai sor összege:

$$2\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + 2x^2\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + 2x^4\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{1}{1-x^2}.$$

A szükséges pontosságnak, továbbá annak figyelembevételével, hogy $x = 0{,}5$, a következő egyenlőtlenséget írhatjuk fel:

$$\frac{1}{1000} > |r_n(x)|_{x=\frac{1}{2}} \leqq \frac{2}{(2n+1)\,2^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-0{,}25} = \frac{4^2}{3\cdot 2^{2n+2}(2n+1)} =$$

$$= \frac{2}{3\cdot 2^{2n-1}(2n+1)}, \text{ amiből } \frac{2^{2n-2}\cdot(2n+1)\cdot 3}{1000} > 1.$$

Némi próbálkozás után kiadódik, hogy $n = 3$ még nem felel meg, ezzel szemben $n = 4$ már csaknem 10^{-4}-nyi pontosságot biztosít.

Ezzel a legelső elhagyható tag: $\frac{x^9}{9}$; $\ln 3$ tehát három tizedesjegynyi pontossággal:

$$\ln 3 \approx 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\right\}\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 2\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{160} + \frac{1}{896}\right\} \approx$$

$$\approx 2\{0{,}5 + 0{,}04167 + 0{,}00625 + 0{,}0011\} \approx 2\{0{,}54903\} = 1{,}098.$$

2. Határozzuk meg $\ln 2$ értékét négy tizedesjegynyi pontossággal.

3. Meghatározandók az

1. $\ln \pi$, 2. $\operatorname{arctg} 5{,}28$, 3. $\operatorname{arsh}(-0{,}17) + \operatorname{arth} 0{,}17$

értékek logarléc pontossággal (három értékes jegyre).

4. $\frac{1}{0{,}99}$-et írjuk fel tizedes tört alakban négy tizedesjegynyi pontossággal.

5. Mekkora hibát követünk el maximálisan, ha a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{0{,}1^k}{k}$$

sor összege helyett első 6 tagját vesszük figyelembe?

6. Határozzuk meg, hogy mekkora az elkövetett hiba maximálisan ha a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0{,}1^n}{n!}$$

sor összege helyett első 4 tagját vesszük csak számításainknál figyelembe.

7. Határozzuk meg, hogy mekkora szakaszon közelíthető meg biztosan az

$$y = e^{x^2}$$

függvény *Mac Laurin*-sorának 5. szeletével, ha az előírt hibamaximum $M = 0{,}3 \cdot 10^{-3}$.

β_2) **1.** Határozzuk meg ln 1,1 értékét három tizedesjegynyi pontossággal.

Megoldás: ln 1,1 értékét $\ln(1+x)$ *Mac Laurin*-sora segítségével számíthatjuk.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots \qquad (-1 < x \leqq 1)$$

ln 1,1 értékét ebből a sorból az $1+x = 1{,}1$ egyenlőség értelmében az $x = 0{,}1$ helyettesítéssel kapjuk. A sor alternáló (ha x helyébe pozitív számot helyettesítünk) és $x = \frac{1}{10}$ helyettesítésnél (sőt bármely $|x| \leqq 1$ helyettesítésnél) a legelső tagtól kezdődően monoton csökken.

A hiba tehát kisebb, mint a legelső elhagyott tag, illetve mint ennek a fele, ha a sorösszeghez az első elhagyott tag felét hozzáadjuk.

Így

$$5 \cdot 10^{-4} \geqq \frac{1}{2} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{-n}}{n}.$$

$n = 2$ még nem felel meg, de $n = 3$ már igen.

$$\ln 1{,}1 \approx 0{,}1 - \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}001}{2 \cdot 3} \approx 0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}0002 \approx 0{,}0952.$$

2. Számítsuk ki logarléc pontossággal (három értékes jegyre) arctg e értékét.

3. Határozzuk meg $\sqrt{1{,}2}$ értékét 5 tizedesnyi pontossággal.

4. $\sqrt[3]{30}$ értékét számítsuk ki 4 tizedesjegy pontosságig.

Útmutatás: $\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}$. Ehhez $\sqrt[3]{1+x}$ sora szükséges. Az $x = \frac{1}{9}$ helyettesítéssel kapjuk a keresett érték $\frac{1}{3}$-át. $x = \frac{1}{9}$ esetén a sor alternáló (ti. x pozitív), és a legelső tagtól kezdve monoton csökkenő. A legelső elhagyott tag felének tehát kisebbnek kell lennie a hibánál. Azaz:

$$\frac{5}{3}\cdot 10^{-5} > \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3n-4)}{3\cdot 6\cdot \ldots \cdot 3n}\,\frac{1}{9^n}.$$

Könnyen kiszámítható, hogy $n = 3$ még nem, de $n = 4$ már megfelel. Ha – mint ebben a példában is – a tagok abszolút értékei nagyon gyorsan csökkennek, célszerűbb az utolsó tagnak nem a felét, hanem pl. a 0,9-szeresét stb. venni. Az a legmegfelelőbb szorzófaktor, amely kb. annyival kisebb egynél, ahányszor „nagyobb" az elhagyott első tag a még figyelembe vettnél. Ezt nagyon könnyen beláthatjuk.

$$\sqrt[3]{30} \approx 3\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}-\frac{2}{9\cdot 2}\cdot\frac{1}{81}+\frac{2\cdot 5}{27\cdot 6}\cdot\frac{1}{729}-0{,}9\,\frac{2\cdot 5\cdot 8}{81\cdot 24}\cdot\frac{1}{6561}\right] \approx 3{,}1072.$$

5. Számítsuk ki $\sqrt{10}$-et négy tizedesjegy pontosságig.

6. Számítsuk ki arth 0,5 értékét 1‰-es pontossággal.

7. Számítsuk ki π értékét arctg x *Mac Laurin*-sorából öt tizedesjegy pontossággal.

Megoldás: Az $x = 1$ helyen arctg x *Mac Laurin*-sora még konvergens, de a konvergencia igen lassú. Viszont a

$$\operatorname{tg} 2\frac{\pi}{8} = 1 = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{8}}$$

egyenlőségből $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8} = -1+\sqrt{2} \approx 0{,}414\,213\,5$. $\dfrac{\pi}{8}$ ezek szerint arctg 0,414 213 5-tel egyenlő. Ezzel az értékkel viszont nehéz számolni, jóllehet a konvergencia ezen értéknél elég gyors. $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$; itt a sor még elég gyorsan konvergál, és számolni is elég könnyű.

$$\pi \approx \frac{6}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{7\cdot 27}+-\ldots+\frac{1}{17\cdot 3^8}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{19\cdot 3^9}\right).^{*}$$

Megjegyezzük, hogy $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ értékét legalább hét tizedesjegyre kell számolnunk. Így:

$$\pi \approx 3{,}141\,593.$$

8. Számítsuk ki $\sqrt[3]{9}$ értéket öt tizedesjegynyi pontossággal.

---

* Lásd az $\frac{1}{2}$ faktor helyett a legutolsó, figyelembe vett tag súlyfaktorára az előző oldalon tett megjegyzésünket.

5. §. A TAYLOR-SOROK NÉHÁNY ALKALMAZÁSI TERÜLETE

a) Alkalmazásuk az integrálszámítással kapcsolatban

α) Integrálás sorbafejtéssel

Határozatlan integrálokat aránylag ritkán tudunk az elemi függvények zárt alakjával kifejezni. Az esetek nagy részében a primitív függvényt nem is ismerjük. Ilyen esetekben úgy tekintjük a határozatlan integrált, mint egy új függvény – az előttünk még ismeretlen primitív függvény – definícióját. Ezt az új függvényt azon x helyeken tekintjük ismertnek, ahol egy olyan eljárással rendelkezünk, amelynek segítségével a függő változónak e helyhez tartozó értékét számítani tudjuk.

Ez bekövetkezik pl., ha az integrálandó függvénynek hatványsorba-fejtésével meg tudjuk határozni az (a, x) szakaszon vett integrált. A hatványsorok ugyanis konvergenciaközük bármely belső résztartományában egyenletesen konvergensek, ott tehát tagonként integrálhatunk. Az így kapott hatványsor ezen tartományban szintén konvergens lesz, és előállítja az integrálandó függvény határozott integrálját mint a felső határ függvényét. Ezzel a keresett függvényt analitikus alakban, hatványsor (*Taylor*-sor) alakjában sikerült előállítanunk.

β) Konvergenciatartomány megállapítása integrálásnál

Az integrálandó függvényt előállító sor egyenletes konvergenciatartományában bizonyosan konvergens a tagonkénti integrálással kapott, primitív függvényt definiáló sor is. Mivel pedig az integrandust legtöbbször hatványsorával adjuk meg, amely a konvergenciaköz bármely résztartományában egyenletesen konvergál, ezért ez a primitív függvény konvergenciatartományát is egyértelműen meghatározza; a két hatványsor konvergenciasugara egyenlő. Az előfordulhat azonban, hogy a primitív függvény hatványsora a határpontokon is konvergens, míg az integrandusé ott esetleg divergál.

γ) Hibabecslés sorok integrálásánál

Határozott integráloknak sorok segítségével történő számolásakor legtöbbször nem a teljes sor értékét számoljuk ki, hanem annak valamelyik szeletével közelítjük a helyes értéket. Hibát követünk el tehát; feltétlenül ismernünk kell az elkövetett hiba nagyságrendjét. Ezt két módszerrel becsülhetjük meg. Ha a primitív függvény hatványsora egyik szeletének tekintjük a kiszámított polinomot, akkor a sor elhagyott tagjai összegének felülről történő megbecslésével (4. § *b) β)* 1. és *β)* 2.) határozhatjuk meg a hibát; ha viszont úgy tekintjük, hogy az integrálandó függvényt definiáló sor egyik szeletét integráltuk csak, akkor a tényleges hibát az integrálandó függvény közelítésében elkövetett hibák határozott integrálja adja.

Jelekben:

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x); \quad \int_a^b f(\xi)\,d\xi = \int_a^b s_n(\xi)\,d\xi + \int_a^b r_n(\xi)\,d\xi,$$

azaz a hiba:

$$H = \int_a^b r_n(\xi)\,d\xi.$$

$$|H| = \left| \int_a^b r_n(\xi)\,d\xi \right| \leq |r_n|_{\max} \int_a^b dx = (b-a)\,|r_n(x)|_{\max}.$$

Példák és feladatok

α

1. Határozzuk meg az

$$y(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

2. Határozzuk meg az

$$I(y) = \int_0^y \frac{e^x - 1}{x}\,dx = Ei^{\star}(y)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

3. Határozzuk meg az

$$y(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{3}\sin^2 t}}\,dt$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

4. Írjuk fel az

$$y(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sh} x}{x}\,dx = Shi(x)$$

és az

$$y(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = Si(x)^{\star}$$

függvények *Mac Laurin*-sorát.

* *Ei**, *Shi*, *Si* szokott jelölések; a legutolsó pl. az integrál és a szinusz szók első betűjének összeolvasztásából keletkezett.

5. Adjuk meg sorfejtéssel az

$$y(x) = \int_0^x \sqrt{1-u^4}\, du$$

függvényt.

6. Írjuk fel az

$$Ei^*(y) = \int_1^y \frac{e^x}{x}\, dx$$

függvénynek az $y = 1$ és az $y = 100$ helyre támaszkodó *Taylor*-sorát.

7. Írjuk fel az

$$Li(z) = \int_1^z \frac{\ln x}{x-1}\, dx$$

függvény $z = 1$ és $z = 100$ helyre támaszkodó *Taylor*-sorát; adjuk meg $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\, dx$ értékét is.

8. Adjuk meg az

$$I(x) = \int_0^x \frac{e^\xi - \cos 3\xi}{\xi}\, d\xi$$

függvény *Mac Laurin*-sorát!

9. Fejtsük *Mac Laurin*-sorba az

$$I(y) = \int_0^y \frac{e^{x^2} + 2(\cos x - 1{,}5)}{x^3}\, dx$$

függvényt.

10. Fejtsük *Mac Laurin*-sorba az

$$\int_0^z \frac{e^{x^2} - x \sin x - 1}{x^{7/2}}\, dx$$

függvényt.

β

1. Adjunk meg egy, az

$$I(y) = \int_0^y \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\psi}\, d\psi$$

függvényt előállító sort, és számítsuk ki ennek segítségével az

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 2\varphi}\, d\varphi$$

integrál értékét négy tizedesjegynyi pontossággal.

Egyenletesen konvergens-e az $I(y)$-t előállító sor a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon?

Megoldás: Először formálisan fogunk számolni, más szóval a konvergencia kérdését, illetve a végzett műveletek jogosságának kérdését utólag igazoljuk. (Ennek egyszerűen az az oka, hogy a számítások legtöbbször többféle módon is elvégezhetők; a konvergencia, illetve a műveletek jogosságának kérdését csak akkor érdemes felvetni, illetve megoldani, ha már rögzítettük, hogy milyen sorokról, illetve műveletekről van szó.)

A binomiális sor felhasználásával:

$$\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2\varphi\right)^{1/2} = 1-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin 2\varphi-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\left(\frac{3}{4}\right)^2\sin^4 2\varphi-$$

$$-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{3}{4}\right)^3\sin^6 2\varphi-\ldots-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k+2)}\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}\sin^{2k+2}2\varphi\ldots$$

$$\int_0^y \sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 2\varphi}\, d\varphi = y-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\int_0^y \sin^2 2\varphi\, d\varphi-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\left(\frac{3}{4}\right)^2\int_0^y \sin^4 2\varphi\, d\varphi-$$

$$-\ldots-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\int_0^y \sin^{2k} 2\varphi\, d\varphi-\ldots.$$

Felhasználva azt, hogy

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} 2\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\,\frac{\pi}{2},$$

kapjuk, hogy

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 2\varphi}\, d\varphi =$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2-\ldots\right].$$

Az

$$\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2\varphi\right)^{1/2}$$

függvény előbb felírt végtelen sora mindenütt, φ bármely értékénél egyenletesen és abszolút konvergens, mert $\left|\frac{3}{4}\sin^2 2\varphi\right| \leqq \frac{3}{4} < 1$, a binomiális sor pedig ($\sqrt{1+x}$ sora pl.) $|x| < 1$ értékekre abszolút és egyenletesen konvergens. Egyenletesen és abszolút konvergens tehát a sor tagonkénti integrálásával nyert sor is mindenütt, így eredményünk nem formális.

Megjegyezzük még, hogy az $I(y)$-t előállító sorban szereplő $\int_0^y \sin^{2n} 2\varphi\, d\varphi$ integrálokat kiszámítva, szabad a zárójeleket felbontani és y azonos trigonometrikus függvényeit összevonni; a sor továbbra is egyenletesen konvergál y minden értékére. Ennek igazolását és a sor átrendezett alakjának kiszámítását az olvasóra bízzuk.

2. Állapítsuk meg, hogy α különböző értékeinél mi az egyenletes konvergenciatartománya az

$$y = \sqrt{1-\alpha\sin^2 x} \quad \text{és az} \quad I(x) = \int_0^x \sqrt{1-\alpha\sin^2 u}\, du$$

függvényeket előállító, $\alpha \sin^2 x$ növekvő hatványai szerint rendezett végtelen sornak

3. Számítsuk ki az

$$I(y) = \int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$$

integrál *Mac Laurin*-sorát, és adjuk meg az egyenletes konvergenciatartományt.

4. Határozzuk meg az

$$\int_0^x \frac{u^3}{e^{u^2}}\, du$$

függvény *Mac Laurin*-sorát és a sor konvergenciatartományát.

γ

1. Határozzuk meg a

$$\mathcal{J} = \int_0^{\pi/6} \cos^{5/4} x\, dx$$

integrál értékét négy tizedes pontossággal.

Megoldás:

$$\mathcal{J} = \int_0^{\pi/6} \cos x \cdot \cos^{1/4} x\, dx = \int_0^{\pi/6} \sqrt[8]{1-\sin^2 x}\, \cos x\, dx\,.$$

Ez a $\sin x = u$ helyettesítéssel, amikor is $x = 0$-hoz $u = 0$, $x = \frac{\pi}{6} = 30°$-hoz $u = \sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5$ tartozik, a következő integrálba megy át:

$$\mathcal{J} = \int_0^{0{,}5} \sqrt[8]{1-u^2}\,du = \int_0^{0{,}5} \left[1 - \binom{\frac{1}{8}}{1}u^2 + \binom{\frac{1}{8}}{2}u^4 - \binom{\frac{1}{8}}{3}u^6 + - \ldots\right] du =$$

$$= \int_0^{0{,}5} \left[1 - \frac{1}{8}u^2 - \frac{1\cdot 7}{8\cdot 16}u^4 - \frac{1\cdot 7\cdot 15}{8\cdot 16\cdot 24}u^6 - \ldots - \right.$$

$$\left. - \frac{1\cdot 7\cdot 15\cdot \ldots\cdot(8k-1)}{8\cdot 16\cdot 24\cdot \ldots\cdot(8k+8)}u^{2k+2} - \ldots\right] du =$$

$$= \left| u - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}u^3 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot 7}{8\cdot 16}u^5 - \ldots - \frac{1}{2k+3}\cdot\frac{1\cdot 7\cdot 15\cdot \ldots\cdot(8k-1)}{8\cdot 16\cdot \ldots\cdot(8k+8)}u^{2k+3} - \ldots \right|_0^{0{,}5}.$$

A $\mathcal{J}$ érték hibája: H_j kisebb, mint a sorfejtés hibájának (H) és az integrálás úthosszának ($0{,}5 - 0 = 0{,}5$) a szorzata:

$$H_j < \frac{1}{2}H.$$

A feltétel szerint: $H_j < 10^{-5}$; ezt biztosan tartjuk, ha $H < 2\cdot 10^{-5}$.
Az $(1-u^2)^{1/8}$ függvény sora állandó előjelű, tehát geometriai sorral majorálható.

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{\frac{1\cdot 7\cdot 15\cdot \ldots\cdot(8k-1)}{8\cdot 16\cdot 24\cdot \ldots\cdot(8k+8)}u^{2k+2}}{\frac{1\cdot 7\cdot 15\cdot \ldots\cdot(8k-9)}{8\cdot 16\cdot \ldots\cdot 8k}u^{2k}} = \frac{8k-1}{8(k+1)}u^2 = \frac{8k-1}{8k+8}u^2.$$

Ezen sorozat monoton növekvő, határértéke u^2. A $q = u^2$ választás tehát megfelelő. Minthogy az integrációs intervallumban u legnagyobb értéke: $\frac{1}{2}$, ezért a $q = \frac{1}{4}$ választás kellő biztonságot nyújt.

$$\frac{1}{10^5} > \frac{1\cdot 7\cdot 15\cdot \ldots\cdot(8n-1)}{8\cdot 16\cdot 24\cdot \ldots\cdot(8n+8)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{1\cdot 7\cdot 15\cdot \ldots\cdot(8n-1)}{8\cdot 16\cdot 24\cdot \ldots\cdot(8n+8)}\cdot\frac{1}{4^{n+1}}.$$

Kis számítással belátható, hogy $n = 2$ még nem, de $n = 3$ már megfelel. Tehát

$$\mathcal{J} \approx \left| u - \frac{1}{3}\,\frac{1}{8}u^3 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{16}u^5 - \frac{1}{7}\,\frac{1\cdot 7\cdot 15}{8\cdot 16\cdot 24}u^7 \right|_0^{0{,}5} \approx 0{,}49441.$$

2. Határozzuk meg sorfejtéssel az

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{ch}(2\sqrt{x}\cos\omega)\,d\omega$$

(ún. paraméteres integrál; l. e sorozat A. V.** kötetét) értékét. Hány tagot kell $|x| \leqq 1$ esetében figyelembe vennünk, hogy a hiba kisebb legyen 10^{-4}-nél.

Megoldás:

$$\operatorname{ch}(2\sqrt{x}\cos\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!}\, x^n \cos^{2n}\omega.$$

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n}\omega\,d\omega = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\pi.$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{ch}(2\sqrt{x}\cos\omega)\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}\,x^n\cos^{2n}\omega\right]d\omega =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}(2n-1)!!}{(2n)!\,(2n)!!}\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}(2n-1)!!}{(2n-1)!!\,(2n)!!\,(2n)!!}\,x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{[(2n)!!]^2}\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{[2^n\cdot n!]^2}\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{[n!]^2}.$$

A kapott sor nyilván x minden értékére egyenletesen konvergens. Ezt közvetlenül is le lehet olvasni, de abból is következik, hogy a sorbafejtett függvény sora az argumentum minden értékére egyenletesen konvergens. A hibabecslést a 4. § *b)* β_1*)*, illetve β_2*)*-ben mondottak szerint végezhetjük. Tegyük fel, hogy $x > 0$. Ekkor a pozitív tagú sorban a két egymást követő tag hányadosa:

$$\frac{x^{n+1}}{[(n+1)!]^2} : \frac{x^n}{[n!]^2} = \frac{x}{(n+1)^2}$$

egy monoton csökkenő 0 sorozat. A hiba:

$$|r_n(x)| \leqq \frac{\dfrac{x^{n+1}}{[(n+1)!]^2}}{1-\dfrac{x}{(n+1)^2}}.$$

$|x| \leqq 1$ esetében $x = 1$-nél a „leglassúbb" a konvergencia, tehát $x = 1$-nél kell, hogy $|r_n|$ kisebb legyen 10^{-4}-nél:

$$10^{-4} > \frac{\dfrac{1}{[(n+1)!]^2}}{1-\dfrac{1}{(n+1)^2}} = \frac{\dfrac{1}{[n!]^2}}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{[n!]^2\,(n^2+2n)}.$$

Ez az egyenlőtlenség $n = 3$-nál még nem, de $n = 4$-nél már fennáll. Tehát

$$I(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{576}.$$

3. Határozzuk meg négy tizedesjegynyi pontossággal az alábbi integrálok értékét:

$$\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{x}\,dx; \quad \int_0^{\pi} e^{\sin x}\,dx; \quad \int_0^{0,3} \frac{\sin x}{x}\,dx; \quad \int_0^{0,2} \frac{1-\cos x}{x^{3/2}}\,dx; \quad \int_0^1 \frac{\cos x}{e^x}\,dx;$$

$$\int_0^{0,2} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx; \quad \int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

b) Gyakorlati alkalmazások:

α) Transzcendens kifejezések közelítő számítása; transzcendens egyenletek megoldása.

β) Implicit módon adott függvénykapcsolatból az egyik változó explicit kifejezése hatványsorával; transzcendens függvénykapcsolat alapján az inverz függvény meghatározása.

γ) Műszaki problémáknál gyakran használt *transzcendens összefüggések pótlása egyszerűbb* — a szükséges pontosság mértékének megfelelő fokszámú — *polinomokkal.*

δ) Differenciálegyenletek megoldásánál; egyes nehezen, vagy elemi eszközökkel egyáltalán nem *integrálható egyenletek megoldásánál.*

ε) Nem lineáris összefüggések pótlása polinomokkal — különösen abban az esetben, ha a két változó közötti összefüggést méréstechnikailag kell meghatározni, de az üzemi viszonyok miatt a mérések alatt az egyik változó csak keveset változhat. Ilyen esetekben ugyanis az interpoláció nagyon pontatlan lenne, viszont a változók egymás függvényében vett deriváltjai kimérhetők, azaz e deriváltaknak is fizikai jelentésük van. A *Taylor*-sor, illetve *Taylor*-polinom felírása ebben az esetben valóban extrapolációs jellegű eljárás, hiszen kis környezetben a függvény viselkedésének (minél pontosabb) ismeretében következtetünk a függvény további lefutására.

Példák és feladatok

α) Transzcendens kifejezések gyors számítása

1. Elektromos távvezetéknél két feszítő oszlop távolsága 100 m; a közöttük kifeszített vezetékhossz 104 m. Állapítsuk meg közelítő módszerrel a belógás nagyságát és a feszítő erőt; becsüljük meg a számított értékek hibáját. A kifeszített pontok egy magasságban helyezkednek el.

Megoldás: A koordinátarendszert vegyük fel úgy, hogy az x tengely a láncgörbe mentén belógó kötél legmélyebb pontjának érintőjével legyen párhuzamos, az y tengely pedig éppen a legmélyebb ponton menjen keresztül. Ennek a pontnak az ordinátáját jelöljük a-val. Válasszuk a-t olyan nagyra, hogy a következő egyenlőség álljon fenn:

$$a = \frac{H}{p}.$$

Itt H jelenti a kötélerő vízszintes komponensét, a keresett feszítő erőt [a kötél (drót) bármelyik darabja egyensúlyban van, ezért a H, amely bármely kötélszakasz két végén ható erők egyetlen vízszintes komponense, állandó kell, hogy legyen az egész kötél mentén.] p, a kötél egységnyi darabjának súlya szintén állandó, és ismert értéket jelent. Ha tehát a értékét sikerül számítanunk, H-t szorzással kapjuk.

Ezekkel az állandókkal a kötél egyensúlyi alakja:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

A legnagyobb belógás = a kötél (drót) végpontjai és az $x = 0$ hely magasságkülönbsége:

$$f = y(50) - y(0).$$

Ezen érték közvetlen számítása nem sikerül, mert a értékét nem ismerjük. Viszont rendelkezésünkre áll az a további adat, hogy a drót felének hosszúsága: $l = 52$ méter. Ezzel

$$52 = \int_0^{50} \sqrt{1+y'^2}\, dx = \int_0^{50} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}\, dx = \int \operatorname{ch} \frac{x}{a}\, dx = a \operatorname{sh} \frac{50}{a}.$$

Így tehát a értékét a következő egyenletből számíthatjuk:

$$\frac{52}{a} = \operatorname{sh} \frac{50}{a}.$$

Ezt a transzcendes egyenletet kell megoldanunk. Vezessük be e célból az $\frac{50}{a} = u$ jelölést, és – feltételezve, hogy u kicsi, ami mindig teljesül is, mert a belógás relatíve nagyon kicsi – a jobb oldalon fejtsünk sorba u hatványai szerint. A kapott *Mac Laurin*-sor 3. szeletét véve figyelembe, még könnyen megoldható – másodfokúra redukálható negyedfokú – egyenletre jutunk, és u kicsinysége miatt a pontosság várható értéke is megfelelő lesz így.

$$\frac{52}{50} u = \operatorname{sh} u \approx u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!}.$$

Ezen egyenlet pozitív megoldása (csak ez jöhet szóba): $u_1 = 0{,}487\,019\ldots$

A hibabecslésnél a következő gondolatmenet alapján járhatunk el: Az

$$\frac{52}{50}u = \operatorname{sh} u$$

egyenlet megoldását geometriailag úgy is interpretálhatjuk, hogy az $\frac{52}{50}u$ egyenletű egyenest és a $\operatorname{sh} u$ egyenletű görbét kell metszésbe hoznunk. Ehelyett mi az $\frac{52}{50}u$ egyenletű egyenest az $u+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}$ egyenletű ötödfokú parabolával hoztuk metszésbe. Megállapíthatjuk – akár a hibabecslő formula alapján, akár a *Mac Laurin*-sor elhagyott tagjait tekintve –, hogy a hiba u pozitív értékeire pozitív, és u-val együtt monoton nő. Ennek következtében a számított u_1 érték bizonyosan nagyobb a helyes értéknél. A legegyszerűbb módon úgy becsülhetjük a hibát, hogy meghatározunk egy olyan u_2 értéket, amely biztosan kisebb, mint az $\frac{52}{50}u$ egyenes és a $\operatorname{sh} u$ görbe metszéspontja. Leghelyesebb ekkor a két közelítő érték számtani közepét tekinteni megoldásnak, mert így a hiba nem nagyobb, mint a két közelítő érték különbségének fele.

Az első közelítő értéket egyszerűen úgy határoztuk meg, hogy $\operatorname{sh} u$ sorfejtésében megtartottuk az első három tagot, és ezzel pótoltuk a függvényt. Alsó becslést viszont a következőképp kaphatunk: a sorfejtés elhagyott tagjainak összegét felülről becsüljük (a $0 \leqq u \leqq 0{,}48\ldots$, illetve, hogy a számítás egyszerűbb legyen, a $0 \leqq u \leqq \frac{1}{2}$ szakaszon), és ezt a felső becslést hozzáfűzzük az első három tag összegéhez. Így $\left(\text{legalábbis a } 0 \leqq u \leqq \frac{1}{2} \text{ szakaszon}\right)$ függvényünk mindenütt nagyobb, mint a $\operatorname{sh} u$ megfelelő függvényértéke, következésképp a kapott metszéspont abszcisszája kisebb a helyes értékénél (1. ábra). Az elhagyott tagokat a 4. § *b)* β_1) rész szellemében becsüljük:

$$u+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!} \leqq \operatorname{sh} u \leqq u+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}\cdot\frac{1}{1-\frac{u^2}{6\cdot 7}} \leqq u+\frac{u^3}{6}+\frac{42}{41{,}75}\cdot\frac{u^5}{120},$$

hacsak $0 \leqq u \leqq 0{,}5$. A megoldandó egyenlet tehát:

$$\frac{52}{50}u = u+\frac{u^3}{6}+\frac{42}{41{,}75}\cdot\frac{u^5}{120},$$

amiből $u_2 = 0{,}487\,002$.

Az $u=\frac{u_1+u_2}{2} = 0{,}487\,011$ érték tehát legfeljebb $10\cdot 10^{-6} = 10^{-5}$-nel különbözik a helyes értéktől.

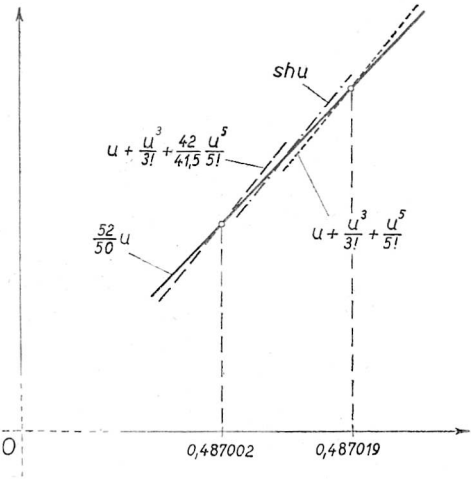
Ebből a, f, illetve H értéke és a hibák azonnal adódnak.

2. Dolgozzuk ki az első feladatot anélkül, hogy az l dróthosszt és a t fesztávolságot konkréten megadnók.

3. Két pont távolságának bemérésekor a kifeszített mérőszalag 12 m hosszúnak bizonyult, lemért belógása pedig 20 cm.

Határozzuk meg a távolság jobb közelítő értékét és az elkövetett hibát

a) a szalag alakját körívnek,
b) másodfokú parabolának,
c) láncgörbének
tekintve.



1. ábra

4. Egy ballisztikus galvanométerbe (a $t=0$ időpillanatban) rövid áramlökést küldünk, amikor is ε töltés folyik a tekercsen keresztül. A tekercs menetszáma legyen N, felülete F, az állandó mágneses térerősség H; c a fénysebesség; a műszer irányító nyomatéka (az egységnyi szögelfordulás esetén fellépő visszaforgató nyomaték) D; K a tehetetlenségi nyomatéka, és r a szögsebességgel arányos csillapítástényezője (amely arányos a tekercs ohmos ellenállásával). Milyen nagy a maximális kiütés? Határozzunk meg ezenkívül egy, a maximális szögelfordulás pillanatát mint a paraméterek

$$t_m = t_m(D, K, r)$$

függvényét előállító, jól konvergáló végtelen sort is.

Megoldás: A $\varphi = \varphi(t)$ függvényt meghatározó

$$K\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + D\varphi = \frac{NFH}{c}\mathcal{J} = q\mathcal{J}\,.$$

($\mathcal{J}$-vel jelöltük az áramerősséget mint az idő függvényét) differenciálegyenletnek a kezdeti értékeket is figyelembe vevő megoldása:

$$\varphi = \varphi(t) = \frac{2NFH}{c}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{4DK-r^2}}\,e^{-\frac{r}{2K}t}\sin\frac{\sqrt{4DK-r^2}\;t}{2K}\,.$$

A legnagyobb kiütés nyilván a csillapított rezgő mozgást végző mutató legelső lengésekor, valamely t_m időben következik be. A t_m időpontot az jellemzi, hogy a $\dfrac{d\varphi}{dt}$ differenciálhányados-függvénynek ez a legelső 0 helye. Azaz

$$\left[\frac{d\varphi}{dt}\right]_{t=t_m} = \frac{2NFH}{c}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{4Dk-r^2}}\cdot$$

$$\cdot\left[-\frac{r}{2K}\,e^{-\frac{r}{2k}t}\sin\frac{\sqrt{4Dk-r^2}}{2k}\,t+\frac{\sqrt{4DK-r^2}}{2K}\,e^{-\frac{r}{2K}t}\cos\frac{\sqrt{4DK-r^2}}{2K}\,t\right]_{t=t_m} = 0.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\sqrt{4DK-r^2}}{2K}t_m=\frac{\sqrt{4DK-r^2}}{2K};\quad t_m=\frac{2K}{\sqrt{4DK-r^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{4DK-r^2}}{2K}.$$

$\frac{2K}{\sqrt{4DK-r^2}}$ egynél sokkal kisebb, illetve egynél sokkal nagyobb értékeinél jól használhatjuk az

$$\frac{1}{x}\operatorname{arc\,tg}x,\ \text{illetve az}\ x\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát, illetve az $\frac{1}{x}$ hatványai szerint rendezett sort t_m gyors számítására:

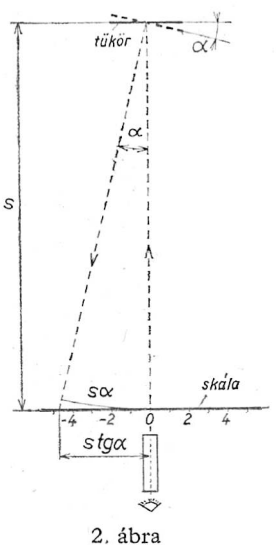
$$\frac{1}{x}\operatorname{arc\,tg}x=\frac{1}{x}\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-+\ldots\right]=1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-+\ldots\quad(|x|\leqq 1),$$

és

$$x\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=x\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}-+\ldots\right]=1-\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{5x^4}-+\ldots\quad(|x|\geqq 1).$$

5. Az előző feladatban jelentse K az ismeretlent; t_m értékét stopperórával és elektromos segédberendezésekkel mértük. Határozzuk meg K értékét.

Megoldás: Nyilvánvalóan $\frac{2K}{\sqrt{4DK-r^2}}$ értékét számítjuk előbb. Ennek ismeretében K másodfokú egyenlet segítségével számítható. Magának a $\frac{2K}{\sqrt{4DK-r^2}}$ értéknek számításához akár az első, akár a második sorfejtés első 3 tagját véve figyelembe, foghatunk hozzá. A kapott egyenlet így másodfokú lesz. Megoldása és a hibaszámítás, valamint a korrigált érték kikeresése az 5. § *b) α)* 1. feladatban bemutatotthoz hasonlóan végezhető.



2. ábra

6. Jó közelítéssel milyen látószög alatt látható a 20 m magas gémeskút 8 km távolságból?

7. Egyenletes beosztású skála s távolságban van a tükörtől. A tükör torziószálon függ, melynek elcsavarodása a mérési határok között a mért áramerősséggel szigorúan lineáris összefüggésben van. Távcsővel végezve a mérést, közvetlen leolvasáskor nyilván helytelen értéket kapunk, mert $s\alpha\neq s\cdot\operatorname{tg}\alpha$. Adjuk meg a (centiméterekben) leolvasott E érték segítségével a korrekció harmad-, ötöd- stb. fokú közelítését! Adjuk meg továbbá a közvetlen leolvasáskor, a harmadfokú korrekciós tag figyelembevételekor stb. elkövetett maximális hibát E függvényében, $\alpha=10°$-os torziószál-szögelfordulásakor.

Megoldás: Tegyük fel, hogy E ugyanolyan egységben van skálázva, mint s. Ekkor

$$\mathfrak{F} = c\,\alpha,$$

ahol a c állandó: műszerállandó. α értékét kell tehát E segítségével megadni. A pontos érték az ábrán látható derékszögű háromszögből:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{E}{s} = \left\{\frac{E}{s} - \frac{E^3}{3s^3} + \frac{E^5}{5s^5} - + \ldots\right\} \left(\left|\frac{E}{s}\right| < 1\right).$$

Ha a sorfejtésnek csak az első tagját vesszük figyelembe: $\alpha_1 = \frac{E}{s}$, az elkövetett hiba: $H = |\alpha_1 - \alpha| \leqq \frac{E^3}{3s^3} = \frac{1}{3}\alpha_1^3$.

$\alpha_1 \leqq 10°$-os szögelfordulásnál: $H_{\max} \leqq \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3$.

A további korrekciós tagokat és hibákat az olvasó már könnyen tudja számítani.

8. Teliholdnál a holdkorong 20′-es szög alatt látható. Hányszor nagyobb a holdátmérőnél a Hold–Föld távolság?

9. Egy kapilláris belső rádiuszát (R) kiszámíthatjuk, ha a benne levő higany súlyát (W) és a szálhosszúságot (L) lemérjük:

$$R = 0{,}153\sqrt{\frac{W}{L}}.$$

Tegyük fel (a valóságos esetben elérhető pontosságoknak jól megfelelve), hogy W pontosan mérhető (mint általában a súly analitikai mérlegen), L azonban csak ε-nyi hibával (minthogy általában a hosszúságmérés pontossága sokkal kisebb a súlymérésnél) mérhető; a mért érték $L' = L + \varepsilon$.

Az ebből számított rádiusz R' hibás: $R' = R + \eta$. Csak elsőrendű, illetve első és másodrendű kicsinyeket figyelembe véve, adjuk meg η-t ε segítségével.

Megoldás:

$$\eta = 0{,}153\left[\sqrt{\frac{W}{L+\varepsilon}} - \sqrt{\frac{W}{L}}\right] = 0{,}153\sqrt{\frac{W}{L}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{L}}} - 1\right] =$$

$$= R\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{L}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right] = R\left\{1 - \frac{\varepsilon}{2L} + \frac{3}{8}\frac{\varepsilon^2}{L^2} - \frac{15}{48}\frac{\varepsilon^3}{L^3} + - \ldots - 1\right\}.$$

Az elsőrendű közelítés: $\eta \approx -\frac{\varepsilon R}{2L}$. Az ekkor (a hibabecslésben) elkövetett hiba kisebb $\frac{3}{8}\frac{\varepsilon^2}{L^2}R$-nél, ha $\frac{\varepsilon}{L}$ elég kicsi. A másodrendű közelítés: $\eta = -\frac{\varepsilon R}{2L} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\varepsilon^2 R}{L^2}$. A hiba ekkor kisebb $\frac{15}{48}\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^3 R = \frac{5}{16}\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^3 R$-nél.

Még jobb közelítést ad az

$$\eta = -\frac{\varepsilon R}{2L} + \alpha \frac{3}{8}\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^2 R$$

érték, ahol $\alpha < 1$, és α értékét az dönti el, hogy a harmadik tag hanyadrésze a másodiknak.

10. A földgolyó 24 óra alatt bolygópályájának, amelynek átmérője közelítően $150 \cdot 10^6$ km, jó közelítéssel 1°-os szögét futja be. (Ui. egy év alig több, mint 360 nap.)

Számítsuk ki, mennyivel tér el a földgolyó útja az egyenestől 1 mp, illetve egy perc alatt? A Föld pályáját tekintsük körnek.

11. Ismerve egy test végsebességét a földreérkezés pillanatában, határozzuk meg, milyen magasról esett le a test — figyelembe véve, hogy a nehézségi gyorsulás a hely függvénye; ezzel szemben a test légüres térben esik, s így a súrlódást elhanyagolhatjuk; hozzuk ki a kapott formula közelítéseképp a $h = \frac{v^2}{2g}$ ismert formulát.

Megoldás: Jelöljük F-fel a vonzóerő értékét a Föld felületén, F'-fel a Föld felszíne felett h magasságban, r-rel a Föld sugarát; M a Föld, m az eső test tömege.

$$F = k\frac{m \cdot M}{r^2}; \quad F' = k\frac{m \cdot M}{(r+h)^2}; \quad k \cdot \frac{M}{r^2} = g,$$

(a nehézségi gyorsulás), mert $gm = P = F$; ugyanígy $k\frac{M}{(r+h)^2} = g'$ (a nehézségi gyorsulás h magasságban).

$$\frac{g}{g'} = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{(r+h)^2} = \left(1+\frac{h}{r}\right)^2; \quad g' = g\left(1+\frac{h}{r}\right)^{-2}.$$

Egyszersmind $g' = \frac{d^2h}{dt^2}$ (a gyorsulás az időben változó magasság idő szerinti második deriváltja).
A megoldandó differenciálegyenlet:

$$g\left(1+\frac{h}{r}\right)^{-2} = \frac{d^2h}{dt^2}.$$

Mindkét oldalt $2\frac{dh}{dt} = 2v$-vel szorozva és integrálva (v a sebesség):

$$g\frac{2\frac{dh}{dt}}{\left(1+\frac{h}{r}\right)^2} = 2\frac{dh}{dt}\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dh}{dt}\right)^2\right]. \qquad -2gr\frac{1}{1+\frac{h}{r}} = C + v^2.$$

A C integrálási állandó értéke azonnal kiadódik, hiszen $h = 0$ esetben v is 0 (0 magasságból 0 sebességgel „esik le" a test.)

$$C = -2gr.$$

$$v^2 = -2gr\left(\frac{1}{1+\frac{h}{r}} - 1\right) = -2gr\left(\frac{r}{r+h} - \frac{r+h}{r+h}\right) = 2gr\frac{h}{h+r}.$$

A $h = \frac{v^2}{2g}$ közelítő formula a

$$v^2 = -2gr\left(\frac{1}{1+\frac{h}{r}} - 1\right) = -2gr\left[1 - \frac{h}{r} + \frac{h^2}{r^2} - \frac{h^3}{r^3} + - \ldots - 1\right] =$$

$$= +2gr\left[\frac{h}{r} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{h^3}{r^3} - + \ldots\right]$$

sor első szeletének figyelembevételével azonnal adódik.

A felírt sor további szeleteivel közelítve a helyes értéket, h-ra mindig komplikáltabb kifejezéseket kapunk, ezért ezeket nem szoktuk használni.

β) Valamely változó explicit kifejezése az eredeti implicit függvénykapcsolatból

1. Fogaskerék-méretezéskor gyakran szükségünk van az

$$y = x - \lambda \operatorname{arc\,tg} y$$

függvény inverzére ($\lambda \neq -1$). Adjuk meg az $y = y(x)$ függvényt hatványsorával.

Megoldás: Tételezzük fel, hogy az $y = f(x)$ függvény az $x = 0$ helyen analitikus, tehát hatványsorával előállítható, továbbá, hogy ez a hatványsor egy r sugarú közben konvergens (tehát a $(-r, r)$ nyílt köz bármely zárt résztartományában abszolút és egyenletesen konvergens).

Ebben a közben: $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n \ldots$

A megoldás – mint már a 3. § *a) η)* 2. feladatokban is láttuk – lényegesen egyszerűbb, ha $c_0 = 0$. Esetünkben az

$$y + \lambda \operatorname{arc\,tg} y = x$$

egyenletben az $x = 0$, tehát az $y = c_0$ helyettesítést elvégezve, és a $c_0 + \lambda \operatorname{arc\,tg} c_0 = 0$ egyenletet grafikusan megvizsgálva, azonnal kiadódik, hogy az egyenletnek egyetlen megoldása $\left(\text{a } -\frac{\pi}{2} < c_0 < \frac{\pi}{2} \text{ intervallumban, amit az a tény jelöl ki,}\right.$ $\left.\text{hogy az arc tg függvény főértékéhez kell ragaszkodnunk}\right)$ a $c_0 = 0$.

Így

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

A megoldandó egyenletet is sorbafejtve és a helyettesítést elvégezve, ezt kapjuk:

$$(c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots) +$$

$$+ \lambda \left\{ (c_1 x + c_2 x^2 + \ldots) - \frac{(c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)^3}{3} + - \ldots \right\} \equiv x,$$

azaz

$$c_1 x (1+\lambda) + c_2 x^2 (1+\lambda) + x^3 \left[c_3 + \lambda c_3 - \frac{c_1^3}{3} \right] + x^4 \left[c_4 + \lambda c_4 - \frac{3 c_1^2 c_2}{3} \right] +$$

$$+ x^5 \left[c_5 (1+\lambda) - \frac{3 c_1 c_2^2}{3} + \frac{c^5}{5} \right] + \ldots \equiv x.$$

Még tovább egyszerűsödik azonban a megoldandó egyenletrendszer (amelyből $c_1, c_2, \ldots$ stb. értékét ki kell számolnunk), ha figyelembe vesszük, hogy – miután az

$$x = y + \lambda \operatorname{arc\,tg} y$$

egyenlet baloldala páratlan függvénye x-nek, a jobb oldal pedig y-nak – y páratlan függvénye kell hogy legyen x-nek. x előjelváltásával ugyanis a jobb oldalnak is jelet kell váltania, ami csak akkor következhetik be, ha y jelet vált.

Ezért y-t ilyen alakban vehetjük fel:

$$y = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots + c_{2n+1} x^{2n+1} + \ldots$$

$$+ \lambda \left\{ (c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots) - \frac{(c_1 x + c_3 x^3 + \ldots)^3}{3} + - \ldots \right\} \equiv x.$$

$$x \cdot c_1 (1+\lambda) + x^3 \left[c_3 (1+\lambda) - \lambda \frac{c_1^3}{3} \right] + x^5 \left[c_5 (1+\lambda) - \frac{3\lambda c_1^2 c_3}{3} + \lambda \frac{c_1^5}{5} \right] +$$

$$+ x^7 \left[c_7 (1+\lambda) - \frac{3\lambda c_1 c_3^2}{3} - \frac{3\lambda c_1^2 c_5}{3} + \frac{5 c_1^4 c_3 \lambda}{5} - \lambda \frac{c_1^7}{7} \right] + \ldots \equiv x.$$

Tehát:

$$c_1 (1+\lambda) = 1, \quad c_3 (1+\lambda) - \frac{\lambda}{3} c_1^3 = 0, \quad c_5 (1+\lambda) - \lambda c_1^2 c_3 + \frac{\lambda}{5} c_1^5 = 0, \quad \ldots;$$

$$c_1 = \frac{1}{1+\lambda}; \quad c_3 = \frac{\lambda}{3 (1+\lambda)^4}; \quad c_5 = \frac{\lambda (2\lambda - 3)}{15 (1+\lambda)^7}; \quad \text{stb.}$$

A konvergenciatartományra a 3. § *a) η)* 2. feladatában megadott képlet alapján adhatunk becslést:

$$x = y + \lambda \operatorname{arc\,tg} y = y (1+\lambda) - \frac{\lambda}{3} y^3 + \frac{\lambda}{5} y^5 - \frac{\lambda}{7} y^7 + - \ldots =$$

$$= (1+\lambda) \left\{ y - \frac{\lambda}{(1+\lambda) 3} y^3 + \frac{\lambda}{(1+\lambda) 5} y^5 - + \ldots \right\} |y| < 1; \quad y = 1.$$

Az y_0-t egynél kisebb számnak választjuk. Így

$$K = \frac{\lambda}{3(1+\lambda)} \cdot y_0^3.$$

Ezzel:

$$r \geqq (1+\lambda)\left\{\frac{2\lambda}{3(1+\lambda)} y_0^3 + y_0 - 2\sqrt{\frac{\lambda y_0^3}{3(1+\lambda)}\left[\frac{\lambda y_0^3}{3(1+\lambda)} + y_0\right]}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{2\lambda y_0^3}{3} + y_0(1+\lambda) - 2\sqrt{\frac{\lambda y_0^3}{3}\left[\frac{\lambda y_0^3}{3} + y_0(1+\lambda)\right]}\right\},$$

ahol y_0 tetszőleges, egynél kisebb pozitív számot, r pedig az inverz hatványsor konvergenciasugarát jelöli.

2. A D átmérőjű, p nyomásra igénybe vett és σ húzófeszültségre terhelt ún. „vastag falú cső" falvastagságára (v) a következő implicit függvénykapcsolatot adhatjuk meg:

$$\frac{v}{f(v,D)} = \frac{Dp}{2\sigma}, \text{ ahol } f(v,D) = \frac{2v}{D\ln\left(1+\frac{2v}{D}\right)}.$$

Adjuk meg a $v = v\left(\frac{p}{\sigma}\right)$ függvénykapcsolatot, *Mac Laurin*-sorával!

Megoldás: $\dfrac{v}{\dfrac{2v}{D\ln\left(1+\frac{2v}{D}\right)}} = \dfrac{Dp}{2\sigma}$, amiből a $\ln\left(1+\dfrac{2v}{D}\right) = \dfrac{p}{\sigma}$

függvénykapcsolatot, majd tovább a

$$v = \frac{D}{2}\left[e^{\frac{p}{\sigma}} - 1\right] = \frac{D}{2}\left\{1 + \frac{p}{\sigma} + \frac{p^2}{2!\,\sigma^2} + \frac{p^3}{3!\,\sigma^3} + \ldots + \frac{p^n}{n!\,\sigma^n} + \ldots - 1\right\} =$$

$$= \frac{D}{2}\left[\frac{p}{\sigma} + \frac{p^2}{2\cdot\sigma^2} + \ldots + \frac{p^n}{n!\,\sigma^n} + \ldots\right]$$

függvénykapcsolatot kapjuk.

3. Fejezzük ki a

$$\sin\alpha = n\sin\alpha'$$

törési törvényből *(Descartes—Snellius*-törvény) az

$$\alpha = f(\alpha')$$

függvénykapcsolatot *Mac Laurin*-sorának 5. szeletével.

4. Egy planparalel lemez első, illetve hátsó lapján reflektált – a reflektáló lemez normálisához α szög alatt beeső – fénysugarak (koherensek) útkülönbsége:

$$\Delta l = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}\,.$$

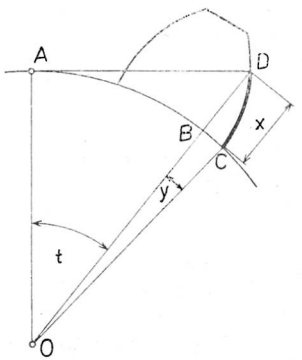
Itt n az üvegnek a levegőre vonatkoztatott törésmutatója. Mivel a gyakorlatban az interferencia-vizsgálatok segítségével Δl lényegesen pontosabban mérhető, mint α, fejezzük ki az

$$\alpha = f(\Delta l)$$

függvényt hatványsorával, pontosan megadva a sor 4. szeletét!

5. A fogaskerekek evolvens fogazásánál a következő – a mellékelt ábrába bejelölt – mennyiségek közötti összefüggésekre van szükségünk:

A leglényegesebb összefüggés amit keresünk, az x távolság függése az y szögtől. x a fog evolvens ívének a D pontban az alapkörtől való távolságát jelenti, y pedig azt a szöget, amit az evolvens ív kérdéses pontjába, illetve a megfelelő „fogtő" pontjába, C-be húzott rádiuszvektorok egymással bezárnak. A kettő közötti kapcsolatot legegyszerűbben a t segédváltozó segítségével tudjuk kifejezni. A a legördülő egyenes azon pillanatnyi érintkezéspontja, amelynél az egyenesnek a görbét felrajzoló pontja éppen D-ben van. t jelenti az A-ba, illetve D-be húzott vektorok egymással bezárt szögét. (Tehát paraméterünk jelentésében eltér a szokásos paramétertől, amelynek segítségével az evolvens egyenletét származtatni szokták; az ti. az A és C pontokba húzott vektorok szöge. Azért mutatkozott szükségesnek, hogy ennél a problémánál a szokásostól eltérő paramétert használjunk, mert a probléma is eltér a szokásostól. A szokásos probléma szerint ugyanis a D pontnak két, a térben fix, egymásra merőleges egyenestől mért távolsága között kell összefüggést megállapítani, a fogaskerékgyártásnál viszont a D pontnak az alapkörtől mért távolságát keressük egy – a D ponthoz egyértelműen hozzárendelt – szög függvényében.)



3. ábra

a) Fejezzük ki y-t a t változó hatványsorával; hasonlóan x-et y hatványsorával, és y-t x hatványsorával.

b) Fejezzük ki x-et y törtkitevőjű szorzót is tartalmazó hatványsorával.

Megoldás: Tekintsük egyszerűség kedvéért az alapkör sugarát egységnyinek. Így a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\overset{\frown}{AC} = t + y = \overline{AD} = \operatorname{tg} t;$$

az egyenes ugyanis csúszás nélkül gördül a körön, így az egymáson legördült ívszakaszok $\left(\overset{\frown}{AC}\right.$, illetve $\left.\overline{AD}\right)$ egyenlőek. Ebből:

$$y = \operatorname{tg} t - t = \operatorname{inv}(t)^*$$

* inv (t) involut t-nek olvasandó; azt a függvényoperációt jelöli tehát, amikor úgy kapjuk a függő változó értékét, hogy a független változó tangenséből magát a változót levonjuk.

Ez a hatványsor – mint azonnal látható – nem invertálható. (Az inv t függvénynek a $t = 0$ helyen nincs hatványsorba fejthető, analitikus inverz függvénye, mert a deriváltja 0.) Az

$$y = f(x), \text{ illetve } x = f^{-1}(y)$$

függvénykapcsolatot épp ezért kerülő úton kell számítanunk. Erre az ad módot, hogy x is kifejezhető t-vel. Az OAD derékszögű háromszögben ugyanis

$$\overline{OD} = \frac{1}{\cos t}; \quad \overline{OB} = 1\,(= r), \quad \text{és így} \quad x = \overline{OD} - \overline{OB} = \frac{1}{\cos t} - 1.$$

Ebből:

$$\cos t = \frac{1}{1+x}; \quad t = \arccos \frac{1}{1+x};$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t} = \sqrt{2x+x^2}; \quad t = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2x+x^2}.$$

$$y = \operatorname{inv} t = \operatorname{inv} \arccos \frac{1}{1+x} = \sqrt{2x+x^2} - \arccos \frac{1}{1+x} =$$

$$= \sqrt{2x+x^2} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2x+x^2}.$$

Ebből megállapíthatjuk azonnal, hogy x-et y hatványsorával megadni szintén nem lehet, mert $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} = 0$.

Különböző módszerekkel a következő sorokat kaphatjuk:

a) Választva egy tetszés szerinti $t = t_0$ értéket, kiszámítva a hozzátartozó x_0 és y_0 értékeket, majd a differenciálhányadosokat is kiszámítva sorban az alábbi módon:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} = \left[\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right]_{t=t_0}; \quad \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_0} = \left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right]\right\}_{t=t_0} \cdot \left[\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\right]_{t=t_0} =$$

$$= \left[\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}\right]_{t=t_0};$$

stb., a kapott értékekkel bármely $0 < t_0 < \frac{\pi}{2}$ helyen felírhatjuk az $y = f(x)$ függvény hatványsorát. Mivel pedig $t_0 \neq 0$ esetében $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=t_0} \neq 0$, azért ennek inverziójával az $x = f^{-1}(y)$ hatványsora is felírható. Előbbi függvény egyik szeletét felírjuk, utóbbit az olvasóra bízzuk:

$$y = y_0 + (x-x_0)\sin t_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\frac{\cos^3 t_0}{\sin t_0} - \frac{(x-x_0)^3}{3!}\left[\frac{\cos^4 t_0}{2\sin t_0} + \frac{\cos^6 t_0}{6\sin^3 t_0}\right] \pm \ldots$$

b) Ha megengedünk a hatványsor előtt valamilyen irracionális szorzót is, akkor a sorfejtést az $x_0 = 0$ helyen is elvégezhetjük; nyilván nem y-t, hanem a jóval könnyebben sorbafejthető $\frac{dy}{dx}$-et fejtjük sorba, majd az egyenletes konvergenciatartományban tagonként is integrálunk:

$$y(x) = \sqrt{2x+x^2} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{2x+x^2}\,.$$

$$y'(x) = \frac{1+x}{\sqrt{2x+x^2}} - \frac{1+x}{\sqrt{2x+x^2}\,(1+x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}\left(1+x-\frac{1}{1+x}\right) =$$

$$= \frac{(1+x)^2-1}{1+x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} = \frac{2x+x^2}{1+x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} = \frac{\sqrt{2x+x^2}}{1+x} =$$

$$= \sqrt{2x}\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-1} =$$

$$= \sqrt{2x}\left\{1+\frac{1}{2}\,\frac{x}{2}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{x}{2}\right)^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\frac{x}{2}\right)^4+-\ldots\right\}$$

$$\{1-x+x^2-x^3+-\ldots\}. \quad (|x|<1).$$

A hatványsor további kiszámítását már az olvasóra bízzuk, helyette a többi lehetőséget mutatjuk be vázlatosan:

c) az $$y = \sqrt{2x+x^2} - \arccos\frac{1}{1+x}$$

kapcsolat differenciálásával:

$$y' = \frac{1+x}{\sqrt{2x+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(1+x)^2}}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1+x}{\sqrt{2x+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2x+x^2}\,(1+x)}\,.$$

Ugyanazt kaptuk tehát, mint az előbb. Ellenben a megadott függvény közvetlen sorfejtésével nagy x-ekre igen jól konvergáló sort kapunk:

$$y = \sqrt{2x+x^2} - \arccos\frac{1}{1+x} =$$

$$= \sqrt{2x+x^2} - \left\{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2\cdot 3}\,\frac{1}{(1+x^3)} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5(1+x)^5} - \ldots\right\} =$$

$$= (1+x)\sqrt{1-\frac{1}{(1+x)^2}} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1+x} +$$

$$+\frac{1}{3!}\,\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{(3!!)^2}{5!}\,\frac{1}{(1+x)^5} + \ldots = \text{stb.}$$

A sor konvergens, ha $\left|\frac{1}{1+x}\right| < 1$, azaz, ha $x > 0$, vagy $x < -2$.

d) Legegyszerűbb az eljárás $\sqrt{2x+x^2} = u$ helyettesítéssel:

$$y = u - \operatorname{arc\,tg} u = u - \left(u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + - \ldots\right) =$$

$$= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} - + \ldots =$$

$$= \sqrt{2x+x^2}\left[\frac{2x+x^2}{3} - \frac{(2x+x^2)^2}{5} + \frac{(2x+x^2)^3}{7} - + \ldots\right] =$$

$$= \sqrt{2x+x^2}\left[\frac{2}{3}x + x^2\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5}\right) + x^3\left(\frac{8}{7} - \frac{4}{5}\right) + \ldots\right].$$

A sor a $2x+x^2 < 1$, azaz a $-1-\sqrt{2} < x \leqq -1+\sqrt{2}$ feltétel mellett konvergál; ugyanitt jogos az átrendezés is.

6. Valamely vezérlést egy csillapított rezgő mozgást végző rendszerrel végeztetünk, melynél a nyugalmi helyzettől mért távolság:

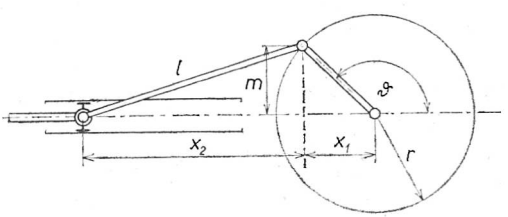
$$x = e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t\,.$$

A vezérlésnél elsősorban az érdekes, hogy bizonyos $x = x_0$ helyeket milyen t időpillanatban ér el a rezgő mozgást végző rendszer.

Számítsuk ki tehát a $t = t(x)$ inverz függvényt, helyesebben hatványsorának második, harmadik és negyedik szeletét.

γ) Függő és független változó bonyolult, transzcendens kapcsolatának pótlása egyszerűbb alakkal

1. Határozzuk meg a forgattyús hajtómű keresztfej-elmozdulását – jó közelítéssel – a szögelfordulás trigonometrikus függvényeinek racionális kapcsolatával; becsüljük meg a hibát, ha λ másodfokú függvényével közelítünk. Adjuk meg az elmozdulást a szögelfordulás *Mac Laurin*-sorával is – hibabecsléssel – az egyes szeletekhez.



4. ábra

Megoldás: Az ábra alapján könnyen beláthatjuk, hogy a keresztfej pillanatnyi távolsága a forgáscentrumtól az x_1-gyel és x_2-vel jelölt távolságok összegeként adódik. Ha a szokásos $\lambda = \frac{r}{l} (\ll 1)$ jelölést bevezetjük:

$$x_1 = r\cos\vartheta = l\frac{r}{l}\cos\vartheta = l\lambda\cos\vartheta\,;$$

x_2 *Pythagoras*-tétellel számítható; ugyanis $m = r \sin \vartheta$, és ezzel

$$x_2 = \sqrt{l^2 - m^2} = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \vartheta} = l\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \vartheta} .$$

Tehát

$$x = x_1 + x_2 = l\{\lambda \cos \vartheta + \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \vartheta}\} .$$

A szögelfordulás és λ függvényeként könnyű x-et, a keresztfej pillanatnyi helyzetét megadni, mert a gyakorlatban $\lambda \ll 1$. Ekkor egyben $\lambda^2 \sin^2 \vartheta \ll 1$, így a binomiális sor bizonyosan konvergens:

$$x = l\left[\lambda \cos \vartheta + \left\{1 - \binom{\frac{1}{2}}{1}\lambda^2 \sin^2 \vartheta + \binom{\frac{1}{2}}{2}\lambda^4 \sin^4 \vartheta - \binom{\frac{1}{2}}{3}\lambda^6 \sin^6 \vartheta + - \ldots\right\}\right].$$

Tekintettel arra, hogy a gyakorlatban általában $\lambda \leqq \frac{1}{5}$, ilyen esetekben fenti sor 3. szelete már igen jó közelítést ad, de természetesen minden további nélkül tovább is tudunk menni az összegezésben. A hibát a 4. § *d) β)* 1. részben ismertetett módon könnyen számolhatjuk, mert a sor tagjai abszolút értékre gyorsan csökkennek.

$$x \approx l\left\{\lambda \cos \vartheta + 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2}\right\} = l\left\{1 + \lambda \cos \vartheta - \frac{\lambda^2}{4}(1 - \cos 2\vartheta)\right\}.$$

A hibára a következő becslést adhatjuk:

$$|r_2(\vartheta)| \leqq l\left|\sum_{k=2}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}\lambda^{2k} \sin^{2k} \vartheta\right| \leqq \frac{l}{8}\sum_{k=2}^{\infty}\lambda^{2k} = \frac{l}{8}\,\frac{\lambda^4}{1 - \lambda^2}$$

$\lambda = \frac{1}{5}$ esetében ezek szerint a relatív hiba kisebb, mint $\frac{1}{4800}$,

azaz nem nagyobb, mint az adott λ érték 0,02%-a. A nagy átrendezési tételt alkalmazva a trigonometrikus függvényeket pótolhatjuk hatványsorukkal. Így

$$\begin{aligned} x = l\Bigg[&\lambda\left(1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} - + \ldots\right) + 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - + \ldots\right)^2 - \\ &- \frac{1}{8}\lambda^4\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - + \ldots\right)^4 - \frac{1}{16}\lambda^6\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - + \ldots\right)^6 - \\ &- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\lambda^8\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - + \ldots\right)^8 - \ldots\Bigg] = \\ = l\Bigg\{&\lambda + 1 - \vartheta^2\left(\frac{\lambda}{2!} + \frac{\lambda^2}{2}\right) + \vartheta^4\left(\frac{\lambda}{4!} + \frac{\lambda^2}{3!} - \frac{\lambda^4}{8}\right) - \\ &- \vartheta^6\left(\frac{\lambda}{6!} - \frac{\lambda^2}{2(3!)^2} - \frac{\lambda^2}{5!} + \frac{\lambda^4}{2 \cdot 3!} - \frac{\lambda^6}{16}\right) + \ldots\Bigg\}. \end{aligned}$$

A hibabecslés legegyszerűbben itt is a 4. § *b) β)* 1.-ben ismertetett módon történhet. Így pl. a 6-od fokú polinom hibájára a következő becslést kapjuk:

Az eredeti sorban szereplő első tag: $l\lambda\cos\vartheta$. Ezt ϑ 7. hatványáig vettük figyelembe, így az elkövetett hiba e tagnál (a figyelembe nem vett tagok összegének abszolút értéke):

$$|h_1| \leqq \frac{l\lambda\,|\cos\vartheta|_{\max}}{8!}\,|\vartheta|^8 = \frac{l\lambda\,|\vartheta|^8}{8!}\,.$$

Ugyanígy

$$|h_2| \leqq \frac{\lambda^2}{4}\,\frac{|2\vartheta|^8}{8!} = \frac{8l\lambda^2}{7!}\,|\vartheta|^8\,;\ \ldots$$

A teljes hiba pedig

$$|H| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} |h_i|\,.$$

2. p nyomáson, γ fajsúlyú, ϱ_0 sűrűségű és t hőfokú gázban valamely zavar longitudinális hullámok formájában történő tovaterjedésénél a zavar terjedési sebessége

$$v = \sqrt{\frac{p\gamma(1+\alpha t)}{\varrho_0}}$$

(ahol t a hőmérséklet). Adjuk meg jó közelítéssel — és megfelelően egyszerű algebrai alakban — a $v = v(t)$ függvényt.

3. Jelölje m_0 egy igen nagy sebességre felgyorsított részecske ún. nyugalmi tömegét, m pedig a v sebességű részecske tömegét. A relativitáselmélet szerint

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Adjunk meg egy megfelelő racionális közelítést az

$$m = f(v)$$

függvényre, olyat, amely $\left|\frac{v}{c}\right| \leqq \frac{9}{10}$ esetén 0,1‰-nél kisebb relatív hibával rendelkezik.

4. A *Van der Waals* állapotegyenletet követő reális gázok esetében az állandó nyomáson és az állandó térfogaton mért molhők különbsége:

$$c_p - c_v = \frac{R}{1-\frac{2a(v-b)^2}{v^3RT}}\,.$$

Adjuk meg a $c_p - c_v$ különbséget az $\frac{1}{T}$ hatványsorának segítségével, és mutassuk ki, hogy első közelítésben a $c_p - c_v$ érték az ideális gázok $c_p - c_v = R$ törvényével egyező eredményt ad.

5. Egy m tömegű, E energiájú részecske változó U potenciális energiájú téren halad keresztül. Eközben a hullámmechanika által hozzárendelt hullám λ hullámhosszúsága is változik a

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}}$$

törvénynek megfelelően. Adjuk meg λ-t U hatványsorával, tudva, hogy $0 < U < E$.

6. A hullámmechanika szerint az E energiájú részecskéhez rendelt hullámra vonatkozóan az U potenciálú tér

$$n = \sqrt{\frac{E-U}{E}}$$

abszolút törésmutatóval rendelkezik; utóbbi törvény az elektronoptikában igen nagy jelentőségű. Adjuk meg n-t U hatványsorával, tudva, hogy $0 < U < E$.

7. Adjuk meg a *Van der Waals* állapotegyenletet követő reális gáz kompreszszibilitás (térfogatelaszticitás) együtthatóját $\frac{1}{v}$ hatványsorával.*

$$\varkappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T=\text{const}} = \frac{1}{\frac{RTv}{(v-b)^2} - \frac{2a}{v^2}}.$$

Mutassuk ki, hogy első közelítésben ez megegyezik az ideális gázok $\varkappa = \frac{1}{p}$ nagyságú kompresszibilitás-állandójával.

8. A relativitáselmélet szerint a 0 kezdő sebességű, V potenciálkülönbséget befutott, $\frac{e}{m_0}$ fajlagos töltésű részecske sebessége a következő egyenletből számítható:

$$m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = eV.$$

Adjuk meg a $V = f(v)$ függvény hatványsorát és mutassuk meg, hogy első közelítésben érvényes a $V = \frac{1}{2}\frac{m_0}{e}v^2$ klasszikus képlet.

9. Egy edényben h magasságú vízoszlop van. Az edényen levő függőleges derékszögű nyíláson másodpercenként

$$q = \frac{2bc}{3}(2g)^{1/2}\left[\left(h+\frac{d}{2}\right)^{3/2} - \left(h-\frac{d}{2}\right)^{3/2}\right]$$

mennyiségű folyadék áramlik ki; a képletben b és c, valamint d a nyílás és az edény méreteitől és alakjától függő állandók.

---

* A *Van der Waals*-állapotegyenlet:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)\cdot(v-b) = RT.$$

Igazoljuk, hogy a $q = q(d)$ függvény

$$q = bcd\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{d^2}{96h^2} - \frac{d^4}{2048h^4} - \dots\right]$$

alakban adható meg.

10. Egy csőben levő T_1 hőfokú és p_1 nyomású gáz az alábbi képlettel megadott módon ömlik ki a p_2 nyomású térbe:

$$V_{s,2} = 223{,}7\left\{cT_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]\right\}^{1/2}.$$

Itt c állandó, a nyílás alakjától és nagyságától függ, $\varkappa$ pedig gázállandó.

a) Miként tudnók az $\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]$ alakú kifejezés számítását meggyorsítani.

b) Számítsuk ki ennek alapján

$V_{s,2}$ értékét, ha $\frac{p_2}{p_1} = 0{,}94$; $\varkappa = 1{,}25$

ha $\frac{p_2}{p_1} = 0{,}98$; $\varkappa = 1{,}4$.

Megoldás: $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$ sorfejtését kellene elvégeznünk. Hogy azonban a binomiális sorfejtésről tanultakat felhasználhassuk, kissé át kell alakítanunk a törtet:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{p_1}{p_1} + \frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{p_1 - p_2}{p_1}.$$

Itt fizikai meggondolások alapján a $p_1 > 0$; $p_2 > 0$; $\frac{p_2}{p_1} < 1$ feltételezés teljesen helyénvaló (csak magasabb nyomásról alacsonyabb felé áramlik a gáz), így

$$0 < \frac{p_1 - p_2}{p_1} < 1$$

is bizonyosan fennáll. Ezzel:

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \left[1 - \frac{p_1 - p_2}{p_1}\right]^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 1 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{p_1 - p_2}{p_1} - \frac{\varkappa-1}{1\cdot 2\cdot \varkappa^2}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1}\right)^2 -$$

$$- \frac{\varkappa^2-1}{3!\,\varkappa^3}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1}\right)^3 - \frac{(2\varkappa+1)(\varkappa^2-1)}{4!\,\varkappa^4}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1}\right)^4 - \dots =$$

$$= 1 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{p_1-p_2}{p_1} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa^2\,2!}\left(\frac{p_1-p_2}{p_1}\right)^2 - \ldots -$$

$$- \frac{(\varkappa^2-1)(2\varkappa+1)(3\varkappa+1)\ldots(n\varkappa+1)}{\varkappa^{n+2}\cdot(n+2)!}\left(\frac{p_1-p_2}{p_1}\right)^{n+2} - \ldots$$

$$\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] = \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{p_1-p_2}{p_1}\cdot$$

$$\cdot\left\{1+\frac{1}{2!\,\varkappa}\,\frac{p_1-p_2}{p_1}+\ldots+\frac{(\varkappa+1)(2\varkappa+1)\ldots(n\varkappa+1)}{\varkappa^{n+1}\cdot(n+2)!}\left(\frac{p_1-p_2}{p_1}\right)^{n+1}+\ldots\right\}.$$

A további számításokat már az olvasóra bízzuk.

11. A relativitáselmélet szerint a föld nehézségi erőterében szabadon eső test által t idő alatt megtett út:

$$x = \frac{c^2}{g}\ln \operatorname{ch}\frac{g}{c}t\,.$$

Mutassuk ki, hogy első közelítésben ez megegyezik a klasszikus mechanika $x = \frac{1}{2}gt^2$ útképletével, és adjuk meg a relativisztikus útképlet további közelítéseit. $\frac{gt}{c}$ mekkora értékéig használható nyugodtan a közelítés, 1‰-nyi hibakorlátot engedélyezve?

δ) Elemien nem integrálható függvények primitív függvényének kiszámítása

1. A statisztika a periodikusan változó jelenségekkel kapcsolatos egyik eloszlásfüggvényt a következő alakban adja meg:

$$y(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-c^2(x-u)^2}}{\sqrt{1-u^2}}\,du\,.$$

Feltételezve, hogy az $\operatorname{erf}(v) = \int_0^v e^{-x^2}\,dx$ integrál tabellázva a rendelkezésünkre áll, határozzunk meg egy megfelelő közelítő képletet az $|x| \leqq 0{,}25$ tartományra, ha $c = 10$.

Megoldás: Tekintettel arra, hogy az $e^{-100(x-u)^2}$ függvény igen gyorsan tart a 0-hoz, ha $|x-u|$ növekszik, az integrálandó függvénynek elsősorban az $u = x$ hely körüli értékei jönnek számításba. Ha tehát az $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ függvényt az $u = x$ helyen *Taylor*-sorba fejtjük, és a sort első- vagy másodrendű szeletével helyettesítjük, akkor ugyan a hiba elég gyorsan növekszik az $|u-x|$ távolsággal, de ez az integrál pontosságát alig befolyásolja, annyira rohamosan csökken közben a másik tényező.

A

$$w = (1-u^2)^{-1/2}$$

függvényt – hogy az $u = x$ helyen sorba tudjuk fejteni – két tényező szorzatára bontjuk:

$$w = (1-u^2)^{-1/2} = (1-u)^{-1/2}\cdot(1+u)^{-1/2} =$$

$$= [1-x-(u-x)]^{-1/2}\cdot[1+x+(u-x)]^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left[1-\frac{u-x}{1-x}\right]^{-1/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}\left[1+\frac{u-x}{1-x}\right]^{-1/2}.$$

Amennyiben ($|u-x| \leqq |1-x|$)

$$w = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{1+\frac{1}{2}\,\frac{u-x}{1-x}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{u-x}{1-x}\right)^2+\ldots\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{1-\frac{1}{2}\,\frac{u-x}{1+x}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{u-x}{1+x}\right)^2+-\ldots\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$$

$$\cdot\left\{1+\frac{u-x}{2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)+(u-x)^2\left[\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{4(1-x^2)}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{1+\frac{x}{1-x^2}(u-x)+\frac{1+2x^2}{2(1-x^2)^2}(u-x)^2\right\}.$$

Ezzel

$$y(x) \approx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{+1} e^{-100(u-x)^2}\left\{1+\frac{x}{1+x^2}(u-x)+\frac{1+2x^2}{2(1-x^2)^2}(u-x)^2\right\}du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{+1} e^{-100(x-x)^2}\,du+\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\int_{-1}^{+1}(u-x)\,e^{-100(u-x)^2}\,du+$$

$$+\frac{1+2x^2}{2(1-x^2)^{3/2}}\int_{-1}^{+1} e^{-100(u-x)^2}\cdot(u-x)^2\,du\,.$$

Ezen integrálok közül a második elemi eszközökkel számítható, a másik kettő a $v = 10(u-x)$ helyettesítéssel könnyen visszavezethető az $\operatorname{erf}(v)$ függvényre; az $\int v^2 e^{-v^2}\,dv$ integrált ugyan ezt megelőzően még parciálisan integrálni kell. Ezen számítások elvégzését az olvasóra bízzuk. A hibabecslés menetét azonban vázlatosan ismertetjük; ezt ugyanis teljesen az eddigi módszerekre támaszkodva nem tudjuk elvégezni, mert az integrál improprius (ez többek között abban jut kifejezésre, hogy az $\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ felírt hatványsora – amelynek 2-es indexű szeletével pótoltuk a függvényt – nem is konvergál a teljes integrációs intervallumon).

Az $|x| \leqq 0{,}25$ feltétel mellett a következőképp okoskodhatunk:
Az

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

függvényt az $u = x$ helyen sorbafejtve, a 2 indexű szelet hibája az $|u-x| \leqq 0{,}25$ szakaszon a következőképp becsülhető:

$$|H_1(u)| \leqq \frac{|f^{(3)}(\xi)|_{\max}}{3!} |u-x|^3,$$

ahol az $f^{(3)}(\xi)$ kifejezésben ξ a $[-0{,}5;\ +0{,}5]$ intervallum valamely pontját jelenti (ti. $|x| \leqq 0{,}25$; $|u-x| \leqq 0{,}25$, így $|u| = |u-x+x| \leqq |u-x| + |x| \leqq$ $\leqq 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$).

$$f(u) = (1-u^2)^{-1/2};\quad f'(u) = u(1-u^2)^{-3/2};\quad f''(u) = (1-u^2)^{-3/2} + 3u^2(1-u^2)^{-5/2};$$

$$f^{(3)}(u) = 9u(1-u^2)^{-5/2} + 15u^3(1-u^2)^{-7/2}.$$

Tehát

$$\max |f^{(3)}(\xi)|_{-0{,}5 \leqq \xi \leqq 0{,}5} \leqq 9 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^{5/2}} + 15 \cdot \frac{1}{8} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^{7/2}} = 14{,}6.$$

$$|H_1(u)| \leqq \frac{14{,}6}{6} |u-x|^3 < 2{,}5\,|u-x|^3.$$

Már most a számított érték hibáját a következőképp lehet becsülni: Az

$$\int_{-1}^{+1} \frac{e^{-100(u-x)^2}}{\sqrt{1-u^2}}\, du$$

integrált két részre osztjuk. Az egyik részen, ahol $|u-x| \leqq 0{,}25$ az elkövetett hiba kisebb, mint

$$2 \int_{u-x=0}^{u-x=0{,}25} e^{-100(u-x)^2} |H_1(u)|\, du \leqq 5 \int_{u-x=0}^{u-x=0{,}25} e^{-100(u-x)^2} (u-x)^3\, du \leqq$$

$$\leqq 5 \int_0^{0{,}25} v^3 \cdot e^{-100v^2}\, dv.$$

A második részen, ahol $|u-x| \geqq 0{,}25$, ott az $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ függvény nem tér el jobban az őt pótló másodfokú polinomtól, mint amekkora a függvény értéke (minthogy a függvény is, a polinom is pozitív, és a függvény e szakaszon biztosan nagyobb, mint a polinom). Ugyanitt a másik tényező abszolút értékben biztosan kisebb $2 \cdot 10^{-3}$-nál:

$$e^{-100(u-x)^2} \leqq e^{-100\left(\frac{1}{4}\right)^2} = e^{-\frac{100}{16}} < 2 \cdot 10^{-3},$$

tehát az eltérés a számított érték és az integrál között biztosan kisebb, mint

$$2\int_{0,25}^{1} 1\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = 4\cdot 10^{-3}\,|\arcsin u|_{0,25}^{1} < 4\,\frac{\pi}{2}\,10^{-3} = 2\pi\,10^{-3}.$$

Az integrálás után kapott $f(x)$ függvény és az $y(x)$ függvény közötti eltérés tehát az $|x| \leqq 0{,}25$ szakaszon:

$$|f(x)-y(x)| \leqq 5\int_{0}^{0,25} v^3 e^{-v^2}\,dv + 2\pi\cdot 10^{-3}.$$

Megjegyezzük még, hogy hibabecslésünk elég durva volt, lényegesen pontosabb a kapott $f(x)$ függvény az $|x| \leqq 0{,}25$ szakaszon, mint ahogy eredményünk mutatja. A hibabecslést a következőképp lehetne finomítani:

Ugyanazokat a módszereket alkalmazva, mint itt, az $|u-x| \leqq 0{,}25$ és az $|u-x| \geqq 0{,}25$ szakaszt is több részre osztjuk, és külön becsüljük az egyes szakaszokon az $|f^{(3)}(\xi)|_{\max}$ értéket (ti. ha pl. $|u-x| \leqq 0{,}1$, akkor $|f^{(3)}(\xi)|_{\max}$ is sokkal kisebb a szóba jövő $-0{,}35 \leqq u \leqq 0{,}35$ szakaszon, mire pedig $|f^{(3)}(\xi)|_{\max}$ eléri a nagyobb értékeket, $e^{-100(u-x)^2}$ már erősen lecsökken), illetve az $e^{-100(u-x)^2}$ értékeket $\left(\text{ti. mire az } \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \text{ nagy értékeket kezd felvenni, } e^{-100(u-x)^2} \text{ értéke erősen lesik}\right)$. Ezt azonban már az olvasóra bízzuk.

2. Számítsuk ki sorfejtéssel az

$$I(x) = \int_{-1}^{+1} e^{-c^2(x-u)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

integrál értékét, ha $c = \frac{1}{10}$.

Megoldás: Az integrál ún. improprius integrál, azonban az $u = \sin t$ helyettesítéssel közönséges integrálba megy át:

$$I(x) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{-\left(\frac{x-\sin t}{10}\right)^2}\,dt.$$

(Azt a megoldásmódot, amit a látszólag hasonló típusú 1. feladatnál alkalmaztunk, itt nem használhatjuk. Ugyanis a második tényező, amely az 1. feladatnál $e^{-100(x-u)}$ volt, most $e^{-\frac{(x-u)^2}{100}}$-zal egyenlő. Így tehát az $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ függvényt *Taylor*-sorának második szeletével pótolva, a hiba rohamosan nő az $|x-u|$ távolsággal.

Az $e^{-\frac{(x-u)^2}{100}}$ tényező viszont nem csökken az $|x-u|$ távolsággal elég gyorsan ahhoz, hogy ezt kompenzálni tudja.)

$I(x)$-et ebben az alakban már gyorsan konvergáló végtelen sorba fejthetjük. Ugyanis

$$e^{-\left(\frac{x-\sin t}{10}\right)^2} = e^{-\frac{x^2}{100}} \cdot e^{\frac{x\sin t}{50}} \cdot e^{-\frac{\sin^2 t}{100}} =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{100}} \left\{1 + \frac{x\sin t}{50} + \frac{x^2\sin^2 t}{2!\,50^2} + \frac{x^3\sin^3 t}{3!\,50^3} + \dots\right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{1 - \frac{\sin^2 t}{100} + \frac{\sin^4 t}{2!\,100^2} - \frac{\sin^6 t}{3!\,100^3} + - \dots\right\}.$$

Tekintettel arra, hogy a páratlan kitevőjű, $\sin^{2n+1} t$ alakú tagok határozott integrálja a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a szakaszon 0, szorzásnál csak azokat a tagokat vesszük figyelembe, amelyeknek páros kitevőjük van, a többit egy $P_p(\sin t)$ alakú tagban egybefoglaljuk. Tekintettel mindkét sor gyors konvergenciájára, már aránylag kevés tag figyelembevétele is nagy x-ekig jó közelítést ad.

Felhasználva, hogy

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2k} t\, dt = \pi \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \dots \cdot 2k},$$

az $I(x)$-et megadó hatványsort könnyen felírhatjuk, és a hibanagyságot is könnyen számíthatjuk. Ezt már az olvasóra bízzuk.

3. Az ún. „klasszikus statisztika" szerint egy molnyi anyag összenergiatartalma:

$$U = 9RTf\left(\frac{\Theta}{T}\right); \quad f\left(\frac{\Theta}{T}\right) = \frac{T^3}{\Theta^3}\int_0^{\Theta/T} \frac{x^3\, dx}{e^x - 1}.$$

Adjuk meg U-t T hatványsorával. Határozzuk meg a fajhőt közvetlen differenciálással és a hatványsorból $\left(c_v = \frac{dU}{dT}\right)$.

4. Számítsuk ki két (a_1 és a_2 sugarú) koaxiális menet kölcsönös indukcióját, ha a körök középpontja egymástól z távolságra van.

Mutassuk ki a *Maxwell* által megadott formula:

$$L_{1,2} \approx \frac{\mu}{c^2} 4\pi a_2 \left[\ln \frac{8a_1}{\sqrt{z^3 + (a_1 - a_2)^2}} - 2\right]$$

közelítő helyességét. Maga az integrál, amely $L_{1,2}$ értékét definiálja, ilyen alakú

$$L_{1,2} = \frac{\mu}{c^2} 4\pi a_2 \int_0^{\pi} \frac{a_1 \cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{p^2 + (q^2 - p^2)\sin^2\frac{\varphi}{2}}}; \qquad p^2 = z^2 + (a_1 - a_2)^2; \quad q^2 = z^2 + (a_1 + a_2)^2.$$

5. *Matematikai inga lengésideje.* Milyen közelítéssel érvényes a matematikai inga lengésidejére a

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

képlet?

Megoldás: Az l hosszúságú fonalra függesztett tömegpontot a függőlegestől α szöggel kimozdítva, $v_0 = 0$ kezdő sebességgel indítjuk el. Tegyük fel, hogy a $(z; y)$ koordinátarendszer y tengelye átmegy a tömegpont kiinduló helyzetét megadó ponton, z tengelye pedig a föld középpontja felé mutat. Tetszőleges z ordinátájú pontban a tömegpont sebessége elemi kinetikai tétel szerint:

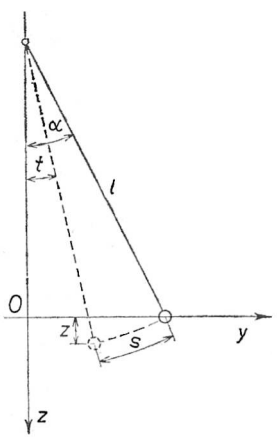
$$v = \sqrt{2gz} = \frac{ds}{dt}.$$

Így

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{\sqrt{2gz}}; \qquad \int_0^t dt = t = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{2gz}}.$$

Az ábrából azonnal kiderül, hogy a $z(t)$ függvény is (a tömegpont pillanatnyi ordinátája), az $s(t)$ függvény is (a tömegpont által a kérdéses pillanatig megtett út) kifejezhető a $\varphi(t)$ függvénnyel, amely a mozgó tömegponttot a felfüggesztési ponttal összekötő fonal és a z tengely által bezárt szöget jelenti:

$$ds = -l\,d\varphi, \qquad z = l\cos\varphi - l\cos\alpha = l(\cos\varphi - \cos\alpha).$$



5. ábra

Így

$$t = \int_a^{\varphi} \frac{-l\,d\varphi}{\sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_a^{\varphi} \frac{-d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}}.$$

A lengésidő negyed részét a $\varphi = 0$ helyettesítéssel kapjuk. Célszerű emellett a

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}; \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

helyettesítéseket elvégezni.

$$\frac{T}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_a^0\frac{-d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^a\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}}.$$

Az integrál improprius integrál; az

$$\left(1-\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{\sin^4\frac{\varphi}{2}}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}+\ldots$$

sor pedig nem konvergál egyenletesen a $0\leqq\varphi\leqq\alpha$ szakaszon. Bevezetjük tehát a ξ integrációs változót a

$$\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\sin\frac{\xi}{2}\text{ reláció alapján, amiből }\sin\frac{\varphi}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\xi}{2}.$$

A $\varphi=\alpha$-nak a $\xi=\pi$ felel meg mint az $1=\sin\frac{\xi}{2}$ egyenlet megoldása, $\varphi=0$-nak $\xi=0$. Így tehát

$$\frac{T}{2}=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\pi\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\xi}{2}\,d\xi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\xi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\frac{\xi}{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\pi\frac{d\xi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\xi}{2}}}.$$

Ez az integrál már nem improprius, és $\alpha\neq\pi$ esetén az

$$\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\xi}{2}\right)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\xi}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^4\frac{\alpha}{2}\sin^4\frac{\xi}{2}+\ldots+$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}\sin^{2k}\frac{\alpha}{2}\sin^{2k}\frac{\xi}{2}+\ldots=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\sin^{2k}\frac{\alpha}{2}\sin^{2k}\frac{\xi}{2}$$

sor ξ minden értékére egyenletesen és abszolút konvergens. Emellett, mint az 5. § *b) δ)* 2. feladatban láttuk:

$$\int_0^{\pi} \sin^{2k} \xi \, d\xi = \pi \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2k}.$$

Szabad tehát tagonként integrálnunk, és

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\xi}{2}}} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sin^n \frac{\alpha}{2} \right]^2 \right\}.$$

Ha tehát a lengésidőt ezen sor első tagjával közelítjük, akkor az elkövetett hibát a maradéktag valamely korlátjával becsülhetjük. Relatív durva becslést adhatunk a 4. § *b) β)* 1.-ben mondottak alapján:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \sin^{n+1} \frac{\alpha}{2} \right]^2}{\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sin^n \frac{\alpha}{2} \right]^2} = \left[\frac{2n+1}{2n+2} \sin \frac{\alpha}{2} \right]^2 < \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

tehát

$$|r_1| \leqq \frac{\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Pontosabb becslésnél megtehetjük pl., hogy az első k tagot figyelembe vesszük, és csak az ezután következőket majoráljuk geometriai sorral.

Ha tehát a

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

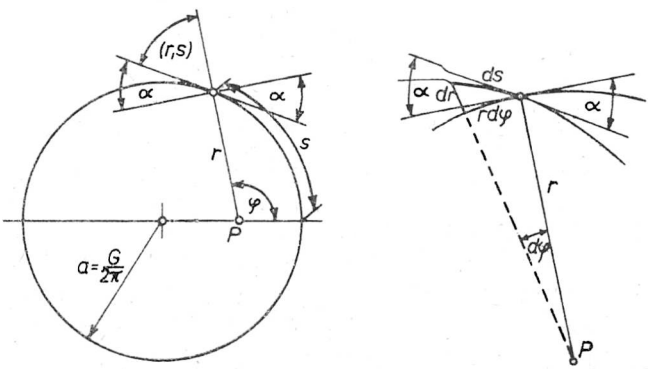
értékkel számolunk, és a maximális kilengés szögét α-val jelöljük, a relatív hiba nem nagyobb $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$-nél. Így pl. 5°-osnál kisebb kilengések esetén a relatív hiba kisebb $^1/_2$‰-nél. 12°-os maximális kilengésnél azonban már 3‰, 20°-nál már 80‰ körüli érték, 45°-nál pedig már közel 4%-os a relatív hiba. A

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\}$$

kéttagú polinom relatív hibája már csak

$$\frac{\frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2}}{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{9}{64}\frac{\sin^4\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{9}{64}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

nagyságrendű, így itt 20°-os maximális kitérésnél a relatív hiba csak $^1/_7$‰-es, 45°-os maximális kitérésnél csak 3,12‰-es.



6. ábra

6. *Fizikai inga lengésideje.* A fizikai inga redukált hosszát a-val jelölve, lengésidejét a következő képlettel szokták közelítően számítani:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Milyen nagyságrendű a képlet hibája h-nak – az inga súlypontja maximális kitérése függőleges vetületének – függvényében; adjuk meg a T-t pontosan előállító sort is. A lengésidőt egyébként a következő integrál definiálja:

$$T = \int_0^h \frac{4a\,dx}{\sqrt{2g(h-x)(2a-x^2)}}.$$

7. *Térerősség egy áramhurok belsejében.* Egy G kerülethosszúságú, köralakú vezetőben $\mathfrak{J}$ erősségű áram folyik. Határozzuk meg a *Biot–Savart*-törvény alapján a térerősséget valamely belső P pontban.

Megoldás: A *Biot–Savart*-törvény szerint:

$$H(P) = \frac{\mathfrak{J}}{4\pi}\oint\frac{\sin(r,s)\,ds}{r^2},$$

ahol r jelenti a P pont és az s (ívhossz-) paraméterű pont távolságát, (r, s) pedig a két pontot összekötő sugár és a vezető érintője által bezárt szöget.

Vegyük fel a P pontban a polár-koordinátarendszer kezdőpontját, a tengelyt pedig a P-n átmenő átmérő adja. A többi jelölés az ábrából látható; r és φ a polár-koordináták. Az $a = \dfrac{G}{2\pi}$ sugarú kör egyenlete:

$$r^2 + 2hr\cos\varphi + h^2 - a^2 = 0; \quad r = -h\cos\varphi + \sqrt{h^2\cos^2\varphi + (a^2 - h^2)}\,.$$

A

$$ds\cos\alpha = r\,d\varphi \quad \text{és a} \quad \cos\alpha = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (r,s)\right] = \sin(r,s)$$

egyenlet az ábra melletti nagyított részábrából következik. Így

$$ds = \frac{r\,d\varphi}{\cos\alpha} = \frac{r\,d\varphi}{\sin(r,s)}.$$

$$H(P;h) = \frac{\mathcal{J}}{4\pi}\oint \frac{ds\sin(r,s)}{r^2} = \frac{\mathcal{J}}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(r,s)\,r\,d\varphi}{r^2\sin(r,s)} = \frac{\mathcal{J}}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r} =$$

$$= \frac{\mathcal{J}}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{h^2\cos^2\varphi + (a^2 - h^2)} - h\cos\varphi} =$$

$$= \frac{\mathcal{J}}{4\pi}\left\{\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{h^2\cos^2\varphi + (a^2 - h^2)}}{a^2 - h^2}\,d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{h}{a^2 - h^2}\cos\varphi\,d\varphi\right\} =$$

$$= \frac{\mathcal{J}}{4\pi(a^2 - h^2)}\int_0^{2\pi} \sqrt{h^2(\cos^2\varphi - 1) + a^2}\,d\varphi = \frac{\mathcal{J}}{4\pi(a^2 - h^2)}\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - h^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{\mathcal{J}a}{4\pi(a^2 - h^2)}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}\sin^2\varphi}\,d\varphi\,.$$

Minthogy $h < a$, az integrandus sorbafejthető a már többször bemutatott módon, és így végtelen sor alakjában, a h (a P pontnak a hurok középpontjától mért távolsága) hatványsorával adhatjuk meg a térerősséget:

$$H(P;h) = \frac{\mathcal{J}a}{4\pi(a^2 - h^2)}\left\{1 - \frac{1}{2}\,\frac{h^2}{a^2}\cdot\frac{1}{2}\,2\pi - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\,\frac{h^4}{a^4}\,\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,2\pi - \right.$$

$$- \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{h^6}{a^6}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,2\pi - \ldots -$$

$$\left. - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot \ldots\cdot(2k-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots\cdot 2k}\,\frac{h^{2k}}{a^{2k}}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots\cdot 2k}\,2\pi - \ldots\right\} =$$

$$= \frac{\mathcal{J}}{2a} \frac{1}{1-\frac{h^2}{a^2}} \left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{h^n}{a^n}\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{\mathcal{J}}{2a} \left\{1 + \frac{h^2}{a^2} + \frac{h^4}{a^4} + \dots\right\} \left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{h^n}{a^n}\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{\mathcal{J}}{2a} \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n}}{a^{2n}} \left[1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2\right]\right\}.$$

ε) Extrapoláció Taylor-sorral

Számos technikai, fizikai folyamatnál a változó mennyiségek közötti összefüggés megállapítása céljából végzett méréseknél nem különböző helyekhez tartozó függvényértékeket, hanem egy helyen („üzemi állapotban") mérjük ki a függő változó deriváltjai értékét, már csak azért is, mert ezeknek konkrét műszaki jelentésük is van. Tulajdonképpen tehát extrapoláljuk a függvényt az üzemi munkapont adatainak birtokában.

Ezeknél a problémáknál a *Taylor*-sort — a feladatok természetéhez alkalmazkodva — formailag kissé átírva használjuk. A független változónak ugyanis nyilvánvalóan nem a 0 ponttól mért távolsága (vagyis helyzete a teljes nyugalomhoz képest) szabja meg a viszonyokat, hanem a munkaponttól mért távolság. Ezért az $x = a$ helyen végezve a sorfejtést és a 0 ponttól mért távolságot z-vel jelölve, független változóként a sorfejtéseknél z helyett az $x = z - a$ értéket tekintjük, amikor is $z = x + a$. Tehát az

$$f(z) = f(a) + f'(a)\frac{(z-a)}{1!} + f''(a)\frac{(z-a)^2}{2!} + \dots$$

sorban a helyettesítést elvégezve, a következő alakot kapjuk:*

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)\cdot x + f''(a)\frac{x^2}{2!} + f'''(a)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

1. Határozzuk meg a „gyártási adatok" ismeretében a z_a *munkaellenállású trióda munkameredekségét*, az anódáram-rácsfeszültség közötti összefüggést első-, másod- és harmadfokú közelítésben, továbbá a munkameredekséget és a munkavonalat!

Megoldás: A szokásos jelölések:

a teljes anódáram: I_a,
ennek egyenáramú része: I_A, Ezekkel: $I_a = I_A + i_a$.
az anódváltóáram: i_a.
Az anódfeszültség (a katódhoz mint „földpotenciálhoz" viszonyítva): E_a,
ennek egyenfeszültségű része: E_A, $E_a = E_A + e_a$,
az anódváltófeszültség: e_a.

* Más szóval: Nem az $f(x)$ függvényt fejtjük az $x = a$ helyen *Taylor*-sorba, hanem az $f(a+x)$ függvényt *Mac Laurin*-sorba.

A rácsfeszültség (szintén a katódhoz viszonyítva): E_r
ennek egyenfeszültségű része (az előfeszültség): E_R,
a rács-váltófeszültség (a tulajdonképpeni erősítendő feszültség): e_r.

$$E_r = E_R + e_r.$$

Az ún. effektív rácspotenciál: $V_r = E_r + DE_a$,
ennek egyenfeszültségű része: $V_R = E_R + DE_A$,
az effektív rács-váltófeszültség: $v_r = e_r + De_a$.
D a cső ún. áthatása; gyártási adat, a csőkatalógusban megtalálható; S a cső ún. statikus meredeksége:

$$S = \left[\frac{dI_a}{dE_r}\right]_{E_a=\text{const}} = \frac{\partial I_a}{\partial E_r}$$

gyártási adat, a csőkatalógusban megtalálható.

Az anódkörben elhelyezett ellenállás, az ún. munkaellenállás: Z_a. A T, W stb. szokásos jelölései az anódáram differenciálhányadosának a rácsfeszültség szerint állandó anódfeszültség esetén:

$$T = \left[\frac{d^2 I_a}{dE_r^2}\right]_{E_a=\text{const}} = \frac{\partial^2 I_a}{\partial E_r^2};$$

$$W = \left[\frac{d^3 I_a}{dE_r^3}\right]_{E_a=\text{const}} = \frac{\partial^3 I_a}{\partial E_r^3}.$$

Szintén „úgynevezett" csőállandók ezek is; a katalógusban gyakran megtalálhatók.*

Először azt igazoljuk, hogy

$$\frac{dI_a}{dV_r} = \left[\frac{dI_a}{dE_r}\right]_{E_a=\text{const}} = \frac{\partial I_a}{\partial E_r} = S,$$

$$\frac{d^2 I_a}{dV_r^2} = \left[\frac{d^2 I_a}{dE_r^2}\right]_{E_a=\text{const}} = \frac{\partial^2 I_a}{\partial E_r^2} = T$$

stb.

Ezek a relációk azonban azonnal következnek abból a tényből, hogy az anódáram (azonos fűtésű körülmények között) egyedül az effektív rácspotenciáltól függ: $I_a = f(V_r)$. Így tehát

$$\frac{\partial I_a}{\partial E_r} = \left[\frac{dI_a}{dE_r}\right]_{E_a=\text{const}} = \frac{dI_a}{dV_r} \cdot \left[\frac{dV_r}{dE_r}\right]_{E_a=\text{const}} = \frac{\partial V_r}{\partial E_r}\,\frac{dI_a}{dV_r};$$

felhasználva, hogy $\dfrac{\partial V_r}{\partial E_r} = \dfrac{\partial [E_r + DE_a]}{\partial E_r} = 1$, valóban azt találjuk, hogy $\dfrac{\partial I_a}{\partial E_r} = \dfrac{dI_a}{dV_r} = S(V_r)$. Ugyanígy igazolhatók a többi összefüggések is.

* Tulajdonképp egyikük sem állandó, hanem E_r és E_a függvényei, pontosabban – ezt igazoljuk is – $E_r + DE_a$ függvényei.

Az anódáramot az effektív rácsfeszültség függvényeként *Taylor*-sorának segítségével extrapoláljuk a munkapontból:

$$I_a = f(V_r) = f(V_R + v_r) = f(V_R) + f'(V_R)v_r + f''(V_R)\frac{v_r^2}{2!} + f'''(V_R)\frac{v_r^3}{3!} + \ldots =$$

$$= I_A + Sv_r + T\frac{v_r^2}{2!} + W\frac{v_r^3}{3!} + \ldots$$

$f(V_R)$ ugyanis a nyugalmi anódáram (az anódáram egyenáramú része).

$$f'(V_R) = \left[\frac{dI_a}{dV_r}\right]_{V_r = V_R} = S(V_R);$$

ugyanígy adódik az $f''(V_R) = T(V_R)$ stb. reláció is.

A sorfejtésben jól láthatóan a „teljes nyugalomtól mért távolság" szerepét V_r, a munkapontot V_R, a tulajdonképpeni változóét pedig v_r játssza.

Első közelítésben a második szelettel dolgozva,

$$I_a = I_A + Sv_r;$$

mivel pedig $I_a - I_A = i_a$, azért

$$i_a = Sv_r = S(e_r + De_a) = S(e_r - DZ_a i_a).*$$

Így tehát

$$i_a(1 - SDZ_a) = Se_r.$$

$$i_a = \frac{S}{1 - SDZ_a} e_r.$$

Munkameredekségen az anódváltóáram–rácsfeszültség viszonyt értjük.** A munkameredekség tehát

$$S_m = \frac{i_a}{e_r} = \frac{S}{1 - SDZ_a} = \frac{S}{1 - \frac{Z_a}{R_b}} = \frac{SR_b}{R_b - Z_a},$$

mert $SD = \frac{1}{R_b}$ (*Barkhausen*-összefüggés; R_b a cső belső ellenállása).

---

* Az anód-váltófeszültség az anódárammal éppen ellenfázisban van. Ugyanis váltóáramú szempontból a cső és a munkaellenállás zárt kört képeznek, amelyre a *Kirchoff* II. törvényt alkalmazva, azt kapjuk, hogy az anódellenálláson ugyanakkora, de ellenkező előjelű (váltó) feszültségesésnek kell létrejönnie, mint a csövön, a feszültségesések összege csak így lehet 0. Mivel pedig a munkaellenálláson létrejövő váltófeszültségesés $E_m = i_a Z_a$, a csövön létrejövő: $e_a = -i_a Z_a$. (Vigyázzunk, ha egyenáramú feszültségeket is vizsgálunk, gondoljuk meg, hogy a csőellenállás-áramkör egyenáramú szempontból még az anódtelep-feszültséggel is bővül!)

** Ezt nem definiálhatjuk S mintájára $\frac{\partial i_a}{\partial e_r}$-rel, minthogy – ha van rácsváltófeszültség – van anódváltóáram is, ekkor azonban $e_a = -Z_a \cdot i_a$ nem lehet állandó, ti. 0.

Harmadfokú közelítésben:

$$i_a = Sv_r + T\frac{v_r^2}{2!} = S(e_r - Di_a Z_a) + T\frac{(e_r - Di_a Z_a)^2}{2!}.$$

$$i_a^2 TDZ_a - i_a[2 + 2SDZ_a + 2TDZ_a e_r] + 2Se_r + Te_r^2 = 0.$$

$$i_a = \frac{[1 + SDZ_a + TDZ_a e_r] + \sqrt{[1 + SDZ_a + TDZ_a e_r]^2 - TDZ_a[2Se_r + Te_r^2]}}{TDZ_a}.$$

Ebből a képletből azonban a munkameredekség már csak mint e_r függvénye adható meg. A tapasztalat szerint már a másodfokú közelítés is elég pontos. Mivel emellett sokkal kényelmesebben használható, mint a legutóbb felírt, utóbbit nem használják a gyakorlatban.

2. Lemérve a $p = p_0$; $v = v_0$ helyen egy gáz $\varkappa$ kompresszibilitási együtthatóját:

$$\varkappa = \left[\frac{dv}{dp}\right]_{T=\text{const}}$$

és a kompresszibilitásnak a nyomásváltozás szerinti differenciálhányadosát, a

$$\left[\frac{d\varkappa}{dp}\right]_{T=\text{const}}$$

mennyiségét, adjuk meg közelítően a kérdéses gáz $p = p_0$ és $v = v_0$ ponton átmenő izotermáját, azaz a

$$v = v(p)$$

függvényt.

3. Egyenes vonalú pályán mozgó testnél lemértük a $t = t_0$, $x = x_0$ összetartozó idő-hely koordináták esetén a test sebességét, gyorsulását és a gyorsulásnak az idő szerinti differenciálhányadosát (elektromos segédezközök segítségével).

Adjuk meg a test mozgástörvényét közelítőleg, azaz az

$$x = x(t)$$

függényt (*Taylor*-sorának negyedik szeletével).

4. Kimértük egy lezárt négypólus z_0 impedanciáját ω_0 frekvenciánál, továbbá diszkriminátor-áramkörök segítségével a

$$\left[\frac{dz}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_0} \quad \text{és a} \quad \left[\frac{d^2z}{d\omega^2}\right]_{\omega=\omega_0}$$

értékeket.

a) Hányadfokú lehet a $z = z(\omega)$ ún. impedancia-karakterisztika maximálisan, ha az előző adatokkal egyértelműen jellemezni tudjuk?

b) Adjuk meg a $z = z(\omega)$ impedancia-karakterisztikát harmadik közelítésben.

c) Vegyes feladatok

1. Milyen szakaszon számítható biztosan (l. a 88. oldalt) az

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

függvény az $y \approx 1 - \frac{x}{2}$ függvény segítségével, ha 1%-os relatív hibát engedünk meg?

2. Az

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

függvény harmadfokú *Taylor*-polinomjával milyen intervallumon számolhatjuk biztosan (l. a 88. oldalt) a függvényértéket 1‰-es hibakorlát-megkötéssel?

Megoldás: A relatív hibára adtunk meg felső korlátot, tehát az egyes helyeken elkövetett hibát az illető helyen felvett függvényértékhez kell viszonyítani. Ez meglehetősen nehézzé teszi a számításokat. Jelen esetben azonban lényegesen egyszerűsítjük számításainkat, ha az egyes x értékeknél elkövetett hibamaximumot nem a megfelelő, hanem a legkisebb függvényérték 1‰-ében állapítjuk meg, azaz $|r_n(x)| < 1 \cdot \frac{1}{1000}$.

A $\sqrt{1+x^2}$ függvény *Mac Laurin*-sora:

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8 + - \ldots$$

Ez a sor pozitív és negatív x-ekre egyaránt alternáló, és konvergenciatartományában ($|x| \leqq 1$) mindenütt monoton csökkenő, ezért a harmadfokú polinom $\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)$ figyelembevételénél elkövetett hiba kisebb, mint $\left|-\frac{1}{8}x^4\right|$. Így tehát:

$$\frac{1}{8}x^4 < \frac{1}{1000}; \quad x^4 < \frac{8}{1000} = \frac{80}{10\,000};$$

$$|x| < \frac{2\sqrt[4]{5}}{10} = \frac{\sqrt[4]{5}}{5} \approx 0{,}299.$$

Érdekes, hogy a teljes konvergenciatartománynak csaknem egyharmadában ilyen jól megközelíti a másod- (harmad-) fokú polinom a függvényt.

3. Határozzuk meg $e^{0,5}$ értékét 1‰-es pontossággal.

4. Határozzuk meg $\sqrt{63}$-at 1‰-es pontossággal.

5. Adjunk korlátot a hibára, ha a

$$y = \sin x$$

függvényt a $[-1, +1]$ intervallumban *Mac Laurin*-sorának ötödfokú szeletével közelítjük?

6. Mekkora szakaszon közelíthető meg biztosan (l. a 88. oldalt) a kötélgörbe másodfokú parabolával, ha a hibahatár 1%?

7. Hányadfokú *Taylor*-polinommal kell közelítenünk az $f(x) = \frac{1}{1-x}$ függvényt, hogy a hiba a $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ közben 1%-nál kisebb legyen, ha a függvényt az $x = 0$, illetve az $x = \frac{1}{4}$ helyen fejtjük sorba?

8. Hány taggal kell közelítenünk az $\ln(1+x)$ függvényt, hogy az $|x| < 0{,}9$ intervallumban a hibamaximum 1% legyen?

9. Írjuk fel az

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

függvény *Mac Laurin*-sorát!

10. Határozzuk meg az

$$y = \frac{e^x - 1}{x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát.

11. Írjuk fel az

$$y = x^3 \sin x^2$$

függvény hatványsorát.

12. Megadandó az

$$y = \sqrt[4]{1 - 3x^2}$$

függvény *Mac Laurin*-sora.

13. Az

$$f(x) = \sin^2 x$$

függvényt x milyen értékéig lehet biztosan (lásd a 88. oldalt) négytagú *Mac Laurin*-sorszeletével max 2%-os hibával megközelíteni?

14. Számítsuk ki arc tg 0,01 főértékét kilenc tizedesjegynyi pontossággal.

15. Határozzuk meg ln 4; ln 6; ln 8 értékét logarlécpontossággal.

16. Határozzuk meg $\sqrt[5]{35}$-öt öt tizedesjegynyi pontossággal.

17. Határozzuk meg π értékét hat tizedesjegyre pontosan az

$$y = \arcsin x$$

függvény *Mac Laurin*-sorának felhasználásával.

18. Számítsuk ki $\sqrt[3]{28}$ értékét öt tizedesjegyre pontosan.

19. Határozzuk meg $\sqrt[10]{1{,}1}$ és $\sqrt[5]{40}$ értékét négy értékes számjegynyi pontossággal.

20. Határozzuk meg $\frac{1}{1013}$ értékét kilenc tizedesjegyre pontosan.

$\left(\text{Írjuk } \frac{1}{1013}\text{-at így fel}\right)$:

$$\left(\frac{1}{1013} = \frac{1}{1000+13} = 0{,}001 \cdot \frac{1}{1+\frac{13}{1000}}\right).$$

21. Számítsuk ki $\frac{1024}{976}$ értékét öt tizedesjegyre pontosan.

22. Írjuk fel $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$ *Mac Laurin*-sorát.

23. Állapítsuk meg a következő függvényekben szereplő állandók értékét úgy, hogy az $x = 0$ hely környezetében a megadott $y(x)$ és $\eta(x)$ függvények a lehető legmagasabb rendben simuljanak egymáshoz; azaz differenciájuk: $y(x) - \eta(x)$ *Mac Laurin*-sora x-nek lehetőleg magas hatványával kezdődjék. Ábrázoljuk a függvényeket és *Mac Laurin*-polinomjuk közös szeletét.

a) $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-ax^2}}$; $\eta(x) = 1 + b \operatorname{sh}^2 x$;

b) $y(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; $\eta(x) = a(e^{bx} - 1)$;

c) $y(x) = a \operatorname{sh} x$; $\eta(x) = \operatorname{ch} x \operatorname{arctg}(bx)$.

24. Igazoljuk, hogy $\frac{b}{a^3}$ kicsiny pozitív értékeire a következő egyenlőség:

$$\sqrt[3]{a^3+b} \approx a + \frac{b}{3a^2}$$

jó közelítéssel érvényes. Az elkövetett hiba negatív (a helyes érték kisebb a számítottnál), és kisebb* $\frac{a}{9}\left(\frac{b}{a^3}\right)^2$-nél, feltéve, hogy $\frac{b}{a^3}$ 1-nél kisebb, és $a > 0$, illetve pozitív a hiba, ha $a < 0$.

25. Számítsuk ki az előző feladat alapján

$$\sqrt[3]{9}\ ;\quad \sqrt[3]{30}\ ;\quad \sqrt[3]{68}\ ;\quad \sqrt[3]{140}$$

értékét, és az előző feladat becslése alapján adjuk meg a hibakorlátot is.

26. Általánosítva a 24. feladatot, igazoljuk, hogy $\sqrt[n]{a^n+x} \approx a+\frac{x}{n\cdot a^{n-1}}$ és a hiba kisebb $\left|\frac{n-1}{2n^2}\cdot\frac{x^2}{a^{2n-1}}\right|$-nél, ha – s ez részben a képlet érvényességére is jellemző – $\frac{x}{a^n}$ egynél kisebb és pozitív. Mekkora a hibakorlát, ha nem kötjük ki $\frac{x}{a^n}$ pozitivitását?

27. Számítsuk ki az előző feladat alapján:

$$\sqrt[5]{35}\ ;\quad \sqrt[7]{2190}\ ;\quad \sqrt[8]{260}\ ;\quad \sqrt[10]{1030}$$

értékét, és a hibakorlátot adjuk meg a fenti becslés alapján.

28. Határozzuk meg, hogy logarléc pontossággal (a hiba 1%-nál kisebb) milyen szögekig, illetve milyen változóértékekre használhatjuk a következő közelítéseket:

a) $\sin x = x$, *b)* $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}$, *c)* $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}$,

d) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$, *e)* $\operatorname{tg} x = x$, *f)* $\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3}$,

g) $\ln(1+x) = x$, *h)* $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$,

és adjuk meg mindegyik közelítésnél a hiba előjelét is.

* (Abszolút értékben.)

6. §. FÜGGELÉK

α) Negatív kitevőjű hatványsorok, illetve $\frac{1}{x}$ hatványai szerint haladó Laurent-sorfejtések

Általánosabb értelemben hatványsornak hívjuk a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad \text{illetve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(x-x_0)^n}$$

alakú sorokat is, amelynek tulajdonságai majdnem pontosan egyeznek (pontosabban tükörképszerűen egyeznek) az 1. §-ban megismert hatványsor-tulajdonságokkal. A feladatok között ezekre kitérünk.

Ez az oka annak is, hogy a *Taylor*-sorokhoz hasonló módon egyes függvényekhez ilyen típusú sorokat rendelhetünk. Mivel azonban az ilyen sorok épp a sorfejtés helye egy környezetében nem konvergensek, a sorfejtést nem a differenciálhányadosok felhasználásával definiáljuk, illetve végezzük, hanem úgy, hogy a sorba fejtendő függvényt megfelelő transzformációval mint

$$\frac{1}{x}, \quad \text{illetve} \quad \frac{1}{x-x_0}$$

függvényét állítjuk elő, majd a

$$z = \frac{1}{x}, \quad \text{illetve} \quad z = \frac{1}{x-x_0}$$

transzformáció után z hatványai szerint haladó sorba fejtjük, és a visszahelyettesítést elvégezzük.

Az ilyen típusú sorok nagy előnye, hogy – mint a feladatok között látni fogjuk – ha egyáltalán konvergensek, konvergenciatartományuk végtelen nagy, és segítségükkel épp az egyébként nehezen tanulmányozható területet vizsgálhatjuk, ti. a függvény viselkedését x nagy értékeinél.

β) Határértékek megállapítása hatványsorok segítségével

Összetett függvények *Taylor*-, illetve *Mac Laurin*-sorának első néhány szeletét – mint az eddigiekben láttuk – gyakran szinte segédszámítások nélkül fel tudjuk írni. Ez alkalmat ad arra, hogy a sorfejtés helyén (ahol nyilván csak az első tagok érdekesek) a határértéket megállapíthassuk közvetlenül, sőt azt is, hogy milyen „gyorsan" konvergál a függvény ezen határértékhez.

γ) A Bernoulli- és Euler-számok alkalmazása

L. a feladatokat.

Példák és feladatok

α

1. Tegyük fel, hogy az általánosabb értelemben hatványsornak (illetve *Laurent*-sornak) nevezett

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$$

sor az $x = x_1$ értéknél konvergál, de az $x = x_2$ ($|x_2| < |x_1|$) értéknél már divergens.

Igazoljuk, hogy a sor abszolut konvergens minden olyan x értéknél, amelyre az $|x| > |x_1|$ egyenlőtlenség érvényes, de divergál minden olyan x értéknél, amelyre az $|x| < |x_2|$ egyenlőtlenség érvényes.

Az I. feladat alapján a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad \text{illetve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(x-x_0)^n}$$

alakú hatványsoroknál is beszélhetünk konvergenciaközről, csakhogy itt nem a közön belül, hanem azon kívül konvergens a sor, éspedig, ha a konvergenciaköz sugarát r_0-lal jelöljük, a hatványsor abszolút konvergens minden olyan x helyen, amelyre

$$|x| > r_0, \quad \text{illetve} \quad |x-x_0| > r_0.$$

Az

$$x = r_0; \quad x = -r_0, \quad \text{illetve} \quad x = x_0 - r_0; \quad x = x_0 + r_0$$

pontokban — a konvergenciaköz határpontjaiban — ismét minden eset előfordulhat.

2. Tekintsük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad \text{illetve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(x-x_0)^n}$$

hatványsort, amelynek r_0 a konvergenciasugara. Igazoljuk, hogy bármely olyan intervallumban, amelynek nincs közös pontja a

$$[-r_0-\varepsilon; \quad r_0+\varepsilon], \quad \text{illetve} \quad [x_0-r_0-\varepsilon; \quad x_0+r_0+\varepsilon]$$

intervallummal ($\varepsilon > 0$, tetszőleges) — azaz amely teljesen benne van a konvergenciatartományban — egyenletesen konvergál a hatványsor.

3. Adjuk meg az

$$y = \operatorname{arc\,tg} x$$

függvény hatványsorát $|x|$ nagy értékeire.

Megoldás: arc tg x *Mac Laurin*-sora csak $|x| < 1$ esetben konvergens. Kíséreljük meg arc tg x-et x negatív hatványai szerint haladó sorba fejteni. Ehhez ugyanúgy arc tg x differenciálhányadosát lesz célszerű felhasználni, mint a *Mac Laurin*-sorfejtésnél.*

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ezt úgy kell átalakítanunk, hogy $\frac{1}{x}$ hatványai szerint fejthessünk sorba, azaz

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - + \ldots;$$

tehát

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int \frac{d}{dx} \operatorname{arc\,tg} x \, dx = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} \pm \ldots$$

---

* Felhasználhattuk volna az arc ctg $x \equiv$ arc tg $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} -$ arctg $\frac{1}{x}$ relációt is, és arctg z hatványsorában elvégezve a $z = \frac{1}{x}$ helyettesítést, az ittenivel egyező eredményre jutnánk.

mivel $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ esetében a fenti geometriai sor egyenletesen konvergens, és tagonként integrálható, arc tg x sora tehát szintén abszolút és egyenletesen konvergens, ha $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, azaz ha $|x| > 1$.

C értékének megállapításához a következő limeszrelációt használhatjuk fel:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi = \lim_{x \to \infty}\left(C - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - + \ldots\right) = C,$$

és így

$$\operatorname{arc\,tg} x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + - \ldots$$

$$(|x| \geqq 1; \quad k = 0; \quad \pm 1; \quad \pm 2; \quad \pm 3; \ \ldots)$$

Emellett

$$\operatorname{Arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + - \ldots, \quad \text{ha} \quad x \geqq 1;$$

$$\operatorname{Arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + - \ldots, \quad \text{ha} \quad x \leqq -1.$$

4. Írjuk fel

$$\frac{x}{1-x}$$

hatványsorát nagy $|x|$-ekre.

5. Írjuk fel az

$$y = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

függvény hatványsorát $|x|$ nagy értékeire.

6. Határozzuk meg az

$$y = \sqrt{x^2 - a}$$

függvény hatványsorát $|x|$ nagy értékeire.

7. Határozzuk meg az

$$y = \operatorname{ar\,ch} x$$

függvény hatványsorát x nagy értékeinél.

Megoldás:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \pm\frac{1}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-1/2} =$$

$$= \pm\frac{1}{x}\left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{1}{x^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{1}{x^6} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\,\frac{1}{x^{2n}} + \ldots\right].$$

A differenciálhányadosra itt megadott sor $|x| > 1$ esetében konvergens, amit a hányados kritérium segítségével könnyen kimutathatunk azzal együtt, hogy $|x| = 1$ esetén a sor már nem konvergens.*

* $|x| < 1$ esetében az ar ch x függvény nincs értelmezve, $x = 1$-re pedig: ar ch $1 = 0$.

Ezzel

$$y = \operatorname{ar\,ch} x = C \pm \left[\ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{6x^6} - \dots \right] \quad (|x| \geqq 1).$$

C értékét $x = 1$ helyettesítéssel nem lehet megállapítani pontosan, mert a sor, amelyet integrálással kaptunk, $x = 1$ esetében már konvergens, de nehéz a kapott sort összegezni. (A sorok numerikus kiszámításával kapcsolatban majd látni fogjuk.) Ezzel szemben $x \to \infty$ határátmenettel már C értékét is számíthatjuk. Ugyanis

$$\operatorname{ar\,ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

és ezért

$$[\operatorname{arch} x - \ln 2x] \to 0, \quad \text{ha} \quad x \to \infty.$$

Innét

$$C = \ln 2.$$

Tehát

$$y = \operatorname{ar\,ch} x = \pm \left[\ln 2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4x^4} - \dots \right]$$

A sor, mint azt a *Raabe*-kritériummal könnyen ki is tudjuk mutatni, $x \geqq 1$ esetében konvergens.

8. Határozzuk meg az

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2} - \sqrt[4]{x^4 + 4x^3}$$

függvény hatványsorát $|x|$ nagy értékeire, és ennek segítségével határértékét, ha $x \to \infty$.

9. Határozzuk meg az

$$y = \operatorname{ar\,sh} x$$

függvény hatványsorát $|x|$ nagy értékeire.

β

1. Tekintsük az $x = a$ helyen analitikus (vagy legalábbis elég sokszor folytonosan differenciálható)

$$y = f(x) \quad \text{és} \quad y = g(x)$$

függvényeket, amelyeknek az a hely 0 helyük:

$$f(a) = 0; \quad g(a) = 0.$$

Igazoljuk, hogy ez esetben

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)};$$

ha továbbá ez utóbbi tört is $\frac{0}{0}$ alakú, akkor

$$\lim_{x \to a} = \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \text{stb.}$$

Megoldás: Mivel $f(a) = 0$, azért $f(x)$ *Taylor*-sora:

$$f(x) = f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$$

Ugyanígy:

$$g(x) = g'(a)(x-a) + g''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)(x-a)+f''(a)\dfrac{(x-a)^2}{2!}+\dots}{g'(a)(x-a)+g''(a)\dfrac{(x-a)^2}{2!}+\dots} = \frac{f'(a)+f''(a)\dfrac{x-a}{2!}+\dots}{g'(a)+g''(a)\dfrac{x-a}{2!}+\dots}.$$

Ha tehát $x \to a$, akkor $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$-hoz.

Ha $f'(a)$ és $g'(a)$ is 0, akkor a *Taylor*-sorokat hasonlóan felírva, és a számlálót és nevezőt $\dfrac{(x-a)^2}{2!}$-sal egyszerűsítve, kapjuk a kívánt eredményt stb.

2. Igazoljuk a következő képlet helyességét:

$$\lim_{u \to u_0} \frac{f(u)-f(u_0)-(u-u_0)f'(u_0)-\dots-\dfrac{(u-u_0)^n}{n!}f^{(n)}(u_0)}{\dfrac{(u-u_0)^{n+1}}{(n+1)!}} = f^{(n+1)}(u_0).$$

3. Határozzuk meg sorbafejtéssel az

$$y = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$$

függvény határértékét $t = 0$ esetben, továbbá, hogy e határértékhez milyen gyorsan tart a függvény!*

4. Határozzuk meg az $y = \left[x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}\right]$ függvény határértékét, ha x minden határon túl nő; milyen rendben tart a függvény ezen határértékhez?

Megoldás: A feladat megoldásánál y-nak olyan hatványsorát célszerű előállítanunk, amely egy bizonyos közön kívül konvergens, azaz $\dfrac{1}{x}$ hatványait tartalmazó hatványsorba kell a függvényt fejtenünk:

$$y = \left[x^2 - x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)}\right] = x^2\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)}\right] =$$

$$= x^2\left\{1-\left[1-\binom{\frac{1}{2}}{1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)+\binom{\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)^2-+\dots\right]\right\} =$$

$$= x^2\left\{1-\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{x^4}-2\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}\right)-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{1}{x^6}-3\frac{1}{x^8}+3\frac{1}{x^{10}}-\frac{1}{x^{12}}\right)-\dots\right]\right\} =$$

$$= x^2\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}-\frac{3}{8}\frac{1}{x^4}\pm\dots\right\} = \frac{1}{2}-\frac{3}{8}\frac{1}{x^2}\pm\dots \quad (|x| > 1).$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^2-\sqrt{x^4-x^2+1}\right] = \frac{1}{2}; \quad \left[x^2-\sqrt{x^4-x^2+1}-\frac{1}{2}\right] = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \text{ ha } x \to \infty.$$

* Lásd a 8. feladatot!

5. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-x+x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

határértékét.

6. Határozzuk meg az

$$y=\frac{2\sqrt{1+x^2}-2-x^2}{[e^{x^2}-\cos x]\sin x^2}$$

függvény $x\to 0$ esetben vett határértékét.

7. Határozzuk meg az

$$y=\frac{\arcsin x-\sin x}{\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{tg} x}$$

függvény határértékét, ha $x\to 0$. Milyen rendben tart e határértékhez a függvény?

8. Határozzuk meg az

$$y=\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

függvény határértékét, ha $x\to 0$.

Megoldás: tg x hatványsora így kezdődik:

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+O(x^5)\,.$$

($O(x^5)$ – olvasd: nagy ordó x^5 – jelentése: $O(x^5)$ egy olyan függvényt jelöl, amely x^5-hez viszonyítva, egy véges és 0-tól különböző határértékhez tart, ha x a 0-hoz, illetve a ∞-hez tart – hogy melyikhez, az attól függ, melyik „hely" közelében végezzük a vizsgálatot. Itt pl. a 0 helyről van szó.

A másik hasonló jelölés: $o(x^k)$ – olvasd: kis ordó x^k – jelentése: $o(x^k)$ egy egy olyan függvényt jelöl, amely x^k-hoz viszonyítva a 0-hoz tart, ha x a 0-hoz, illetve a ∞-hez tart – hogy melyikhez, az itt is csak attól függ, melyik „hely" közelében végezzük a vizsgálatot.)

Tehát:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1+\frac{x^2}{3}+O(x^4)\,,$$

$$y=\left[1+\frac{x^2}{3}+O(x^4)\right]^{\frac{1}{x^2}}$$

Hozzuk be új változóként az $x^2=u$-t ($x\to 0$ esetén $u\to 0$)

$$y=\left[1+\frac{u+O(u^2)}{3}\right]^{\frac{1}{u}}.$$

Most már felhasználhatjuk az A. II. kötet 10. §-ban talált eredményt, mely szerint

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}\to e$$

s az A. II. 10. § 51. feladatban talált másik eredményt, mely szerint

$$\left[1+\frac{a+\varepsilon_n}{n}\right]^n\to e^a$$

ha $\{\varepsilon_n\}$ 0 sorozat. y ugyanis így is írható:

$$y = \left\{1+\frac{u}{3}\left[1+\frac{O(u^2)}{u}\right]\right\}^{\frac{1}{u}}.$$

Mármost meg tudunk adni bármilyen $\varepsilon > 0$-hoz egy olyan u értéket, hogy

$$|1+\varepsilon| > \left|1+\frac{O(u^2)}{u}\right| > |1-\varepsilon|$$

hacsak $|u| \leqq u_0(\varepsilon)$, tekintettel arra, hogy még $\frac{O(u^2)}{u^{3/2}} \to 0$, ha $u \to 0$. Ezzel

$$e^{\frac{1+\varepsilon}{3}} \geqq \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \geqq e^{\frac{1-\varepsilon}{3}}.$$

Mivel pedig ε bármilyen kicsi szám lehet, ezért

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.$$

9. Milyen lesz jó közelítéssel az

$$i = i(t)$$

áramerősség-idő függvény egy olyan áramkörben, amelyben nagy önindukciós tekercs és elhanyagolhatóan kicsiny ellenállás van, ha a $t = 0$ időpillanatban egy

$$E = E(t) = E_0$$

(E_0 konstans) feszültségű áramforrást kapcsolunk a körre.

Megoldás: Az $i(t)$ áramerősséget a következő képlettel adhatjuk meg egy olyan áramkörbeni: amely egy E_0 feszültségű generátort, egy L önindukciójú tekercset és R ellenállást tartalmaz:

$$i = i(t) = \frac{E_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Mivel R nagyon kicsiny L-hez képest, célszerűnek látszik a sorfejtés ből adódó formát használn

$$i = i(t) = \frac{E_0}{R}\left[1-\left(1-\frac{R}{L}t+\frac{R^2t^2}{2!\,L_2}-\frac{R^3t^3}{3!\,L^3}+-\ldots\right)\right] =$$

$$= E_0\left\{\frac{t}{L}-\frac{Rt^2}{2!\,L^2}+\frac{R^2t^3}{3!\,L^3}-+\ldots\right\}.$$

Az eredeti problémára akkor kapunk igen jó közelítéssel választ, ha a sorfejtésben az $R \to 0$ határátmenettet elvégezzük, amiből:

$$i_L(t) = \lim_{R\to 0} i(t) \sim \frac{E_0}{L}t.$$

Az áram tehát lineárisan nő minden határon túl. (Gyakorlatilag természetesen csak egy $t < T$ időpillanatig helyes a képlet — ott is csak jó közelítéssel. Minél kisebb R, annál nagyobb T.)

γ

1. $B_n^*(x)$

jelentse azt az n-ed fokú racionális polinomot, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$1.\ B_{n-1}^*(x) = \frac{dB_n^*(x)}{dx}; \qquad 2.\ \int_0^1 B_n^*(\xi)\,d\xi = 0;$$

3. $B_0^*(x)$ – melyre a 2. feltétel nem teljesül – legyen azonosan 1, azaz $B_0^*(x) \equiv 1$. Igazoljuk, hogy 2. követelésünk így is fogalmazható: $B_k^*(0) = B_k^*(1)$.

2. Vezessük be a következő jelölést:

$$n!\,B_n^*(0) = B_n = B^n$$

(szimbolikus értelemben); a $B_n = B^n$ számokat *Bernoulli*-számoknak nevezzük.

Állítsuk elő $B_1^*(x)$; $B_2^*(x)$; ...-t a *Bernoulli*-számok segítségével.

3. Igazoljuk, hogy a *Bernoulli*-számok előállítására a következő rekurziós formulát használhatjuk fel:

$$1+\binom{n}{1}B_1+\binom{n}{2}B_2+\ldots+\binom{n}{n-1}B_{n-1}=0; \quad (n \geqq 2)$$

szimbolikus jelöléssel:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B^k,$$

azaz a szimbolikát továbbvíve:

$$(1+B)^n - B^n = 0 \qquad (n \geqq 2).$$

4. Igazoljuk, hogy a páratlan indexű *Bernoulli*-polinomok az $x = 0$ és $x = 1$ helyen a 0 értéket veszik fel, azaz

$$B_{2k+1}^*(0) = B_{2k+1}^*(1) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

5. Mutassuk meg, hogy a páratlan *Bernoulli*-számok – B_1 kivételével – mind zérusok, azaz

$$B_3 = B_5 = \ldots = B_{2k-1} = \ldots = 0.$$

6. Jelöljük a továbbiakban azt a függvényt, amely a $B_n^*(x)$ *Bernoulli*-polinommal a $0 \leqq x \leqq 1$ szakaszon megegyezik ($B_1(x)$ kivételes!), és 1 periódusú, $B_n(x)$-szel.

Ekkor tehát

$$B_n(x) \equiv B_n^*(x), \quad \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 1; \quad n = 2, 3, \ldots$$

és

$$B_n(x \pm 1) = B_n(x); \quad -\infty < x < \infty.$$

$B_1(x)$-et pedig így definiáljuk:

$$B_1(x) = B_1^*(x), \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1;$$

$$B_1(0) = B_1(1) = 0; \quad B_1(x \pm 1) = B_1(x); \quad -\infty < x < \infty.$$

Ábrázoljuk a

$$B_1(x); \quad B_2(x); \quad B_3(x); \ldots; \quad B_5(x)$$

függvényeket.

Megjegyezzük egyébként, hogy a Bernoulli-polinomokból származó $B_n(x)$ periodikus függvényeket Fourier-sorba fejtve (l. egyébként a B. VI. kötetet) a Bernoulli-számokra becslést adhatunk:

$$B_{2k} = B^{2k} = O\left(\frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\right).$$

7. Tekintsük az $x = a$ helyen analitikus

$$y = f(x)$$

függvényt, és értelmezzük az

$$f[a+Bh]$$

mennyiséget a következő módon:

A

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} z^k$$

hatványsor legyen konvergens valamilyen

$$a-r_0 < x < a+r_0, \quad \text{azaz} \quad -r_0 < z < r_0$$

közön és vagy az egész közön (ha itt $f(x)$ mindenütt analitikus: 2. § δ), vagy annak egy belső

$$-r_1 < z < r_2$$

részintervallumán azonosan egyenlő $f(x)$-szel, azaz

$$f(a+z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} z^k, \quad \text{ha} \quad -r_1 < z < r_2.$$

Legyen már most

$$f[a+Bh] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(Bh)^k,$$

ahol

$$(Bh)^0 = 1; \quad (Bh)^1 = B_1 h; \quad (Bh)^2 = B^2 h^2 = B_2 h^2; \ldots$$

hacsak h elegendően kicsiny ahhoz, hogy található egy olyan, a

$$-r_1 < z_0 < r_2$$

egyenlőtlenségnek eleget tevő $z = z_0$ érték, amellyel fennállnak a

$$|B_n h^n| \leqq z_0^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

egyenlőtlenségek.*

Igazoljuk, hogy ezen jelölés értelmében fennáll az

$$f[a+(B+1)h] - f[a+Bh] = hf'[a+h],$$

ha h elegendően kicsiny ahhoz, hogy fennálljanak a

és

$$\left.\begin{aligned} |(B+1)^n h^n| &\leqq z_0^n \\ |B_n h^n| &\leqq z_0^n \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

---

* Megjegyezzük, hogy a B_n számok oly gyorsan nőnek, hogy ilyen z_0 akkor és csakis akkor található, bármilyen kicsiny is h, ha

$$r_1 = \infty \quad \text{és} \quad r_2 = \infty,$$

azaz ha az $f(x)$ hatványsora mindenütt $f(x)$-hez konvergál.

egyenlőtlenségek egy megfelelő

$$-r_1 < z_0 < r_2$$

értékkel.

8. Megtartva a 7. feladat jelöléseit, végezzük el az

$$f[a+(B+1)h]-f[a+Bh] = hf'[a+h]$$

relációban a

$$h = -a$$

helyettesítést (feltételezve természetesen, hogy h ilyen választása mellett még fennállanak a h-ra vonatkozó korlátozó egyenlőtlenségek), és bontsuk fel a szögletes zárójelben levő kerek zárójelet. Így a következő relációra jutunk:

$$f(Bh)-f(Bh-h) \equiv hf'(0),$$

ha h a megfelelő intervallumban van.

Igazoljuk, hogy ez az azonosság a tett feltevések mellett valóban fennáll, más szóval, hogy a tisztán szimbolikusan értelmezett

$$f[a+(B+1)h]$$

kifejezésben fel szabad bontani a kerek zárójelet.

Igazoljuk továbbá, hogy amennyiben az f függvényre érvényes valamely zárt alakú addíciós formula, pl. általában a következő:

$$\begin{aligned} f(a+b) = {} & a_1 f(a)+a_2 f(b)+a_3 f(a)f(b)+a_4 f(a)f'(b)+ \\ & + a^5 f'(a)f(b)+a_6 f'(a)f'(b)+ \ldots + \\ & + a_S f(a)f(b)f'(a)f'(b)f''(a)f''(b) \ldots f^{(p)}(a)f^{(q)}(b), \end{aligned}$$

akkor fennáll a következő összefüggés is:

$$\begin{aligned} f(Bh-h) = {} & a_1 f(Bh)+a_2 f(-h)+a_3 f(Bh)f(-h)+ \\ & + a_4 f(Bh)f'(-h)+a_5 f'(Bh)f(-h)+ \ldots + \\ & + a_S f(Bh)f(-h)f'(Bh)f'(-h) \ldots f^{(p)}(Bh)f^{(q)}(-h). \end{aligned}$$

9. Fejtsük sorba az

$$y = \frac{x\,e^x}{e^x-1}$$

függvényt, és adjuk meg a sor konvergenciatartományát.

Megoldás: A 8. feladatban levezetett összefüggést fogjuk felhasználni az

$$f(x) = e^x$$

választással, amelyet *Mac Laurin*-sora minden x értékre előállít, és így h-val szemben nem kell korlátozó feltevést bevezetnünk.* Egyébként a 8. feladatban bevezetett összefüggésben a $h = x$ betűcserét elvégezve, írjuk fel összefüggéseinket:

$$e^{Bx}-e^{Bx-x} = x\left[\frac{de^x}{dx}\right]_{x=0} = x.$$

* Pontosabban szólva, még így is kell, oly gyorsan nőnek a B_n *Bernoulli*-számok (l. a 148. oldalon a lábjegyzetet). Könnyen belátható, hogy a

$$|h| < 2\pi$$

feltevés mellett, és csakis ekkor konvergens az e^{Bh}-t definiáló hatványsor. Ha azonban egyáltalán létezik olyan h, amellyel konvergens a kérdéses sor, h értékének pontos megállapítása csak a konvergenciatartomány megállapítása céljából lehet érdekes, a sorfejtés szempontjából nem.

$$e^{Bx} - e^{Bx}\, e^{-x} = x\,.$$

$$e^{Bx} = \frac{x}{1-e^{-x}} = \frac{x \cdot e^{x}}{e^{x}-1}\,,$$

azaz

$$\frac{x\,e^{x}}{e^{x}-1} = 1 + Bx + \frac{(Bx)^2}{2!} + \frac{(Bx)^3}{3!} + \ldots = 1 + B_1 x + \frac{B_2 x^2}{2!} +$$

$$+ B_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{B_k x^k}{k!} + \ldots = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} \pm \ldots .$$

A konvergenciatartomány megállapításához a $\dfrac{B_{2k}\, x^{2k}}{(2k)!}$ alakú tagokat kell megbecsülnünk – arra tekintettel, hogy a páratlan indexű *Bernoulli*-számok (B_1 kivételével) 0 értékűek.

$$2\,\frac{|\,x^{2k}\,|}{(2\pi)^{2k}} < \left| B_{2k}\,\frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| < 4\,\frac{|\,x\,|^{2k}}{(2\pi)^{2k}} = 4\left(\frac{|\,x\,|}{2\pi}\right)^{2k}.$$

A sor tehát $|x| < 2\pi$ esetén az őt majoráló $\sum_{k=1}^{\infty} 4\left(\dfrac{|x|}{2\pi}\right)^{2k}$ geometriai sorral együtt abszolút konvergens, $|x| \geqq 2\pi$ esetén viszont a minoráló $\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\dfrac{|x|}{2\pi}\right)^{2k}$ geometriai sorral együtt divergens.

Így a pontos konvergenciaköz sugara: $r = 2\pi$, de az $x = 2\pi$ és $x = -2\pi$ helyeken a sor divergens.

10. Határozzuk meg

$$x \operatorname{ctg} x$$

Mac Laurin-sorát, felhasználva, hogy

$$\sin Bx = B_1 x - \frac{B_3 x^3}{3!} + \frac{B_5 x^5}{5!} - + \ldots = \frac{x}{2}\,.$$

Határozzuk meg a sor konvergenciatartományát.

11. Az ún. *Euler*-féle számokat ($E_n = E^n$) a következő egyenletrendszer segítségével definiáljuk:

$$(E+1)^k + (E-1)^k = 0\,.$$

Igazoljuk, hogy a páratlan indexű *Euler*-féle számok is mint a *Bernoulli*-számok 0-val egyenlők:

$$E_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

12. Tekintsük az $x = a$ helyen analitikus $f(x)$ függvényt, és értelmezzük az

$$f(a+Eh)$$

mennyiséget a következőképp:

$$f(a+Eh) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,Eh + \frac{f''(a)}{2!}\,(Eh)^2 + \ldots =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,E_1 h + \frac{f''(a)}{2!}\,E_2 h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\,E_3 h^3 + \ldots ,$$

feltéve, hogy h megválasztható úgy, hogy az

$$a \pm \sqrt[k]{|\,E_k\,|} \cdot h \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

koordinátájú pontok k minden értékére benne vannak az $f(x)$ függvény $x = a$ helyen felírt *Taylor*-sora konvergenciaközében.

Igazoljuk, hogy ekkor fennáll az

$$f[a+(E+1)h]+f[a+(E-1)h] \equiv 2f(a)$$

azonosság h bármely – az előzők értelmében elegendően kicsiny – értékére.

13. Igazoljuk, hogy ha az $f(x)$ függvény eleget tesz valamilyen zárt alakban megadható addíciós tételnek (8. feladat), akkor ez az addíciós tétel (formálisan alkalmazva) érvényes az

$$f(a+Ex)$$

kifejezésre is.

14. Tegyük fel, hogy a 12. feladatban szereplő $f(x)$ függvény olyan, hogy még a $h = +a$ választás mellett is az

$$a \pm \sqrt[k]{|E_k|}\, h$$

abszcisszájú pontok k minden értékére beleesnek a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{n}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}$$

hatványsor konvergenciatartományába. Igazoljuk, hogy ez esetben érvényes az

$$f[2a+Ea]+f[Ea] = 2f(a)$$

egyenlőség, azaz az

$$f[a+(E+1)h]+f[a+(E-1)h] = 2f(a)$$

képletben a „kerek" zárójelek felbonthatók.

15. Igazoljuk, hogy az *Euler*-féle számok eleget tesznek az

$$E_{2n}+\binom{2n}{2}E_{2n-2}+\binom{2n}{4}E_{2n-4}+\ldots+E_0 = 0$$

egyenletnek, továbbá, hogy a 4-gyel osztható indexű *Euler*-féle számok pozitív, a 4-gyel nem oszható, páros indexű *Euler*-féle számok negatív előjelűek.

Igazoljuk végül, hogy az

$$\left\{E_{2n} \cdot \frac{2^n}{(2n)!}\right\}$$

sorozat konvergens 0 sorozat.

16. Igazoljuk, hogy az

$$y = \frac{1}{\cos x}$$

függvény *Mac Laurin*-sora így írható fel az *Euler*-féle számok segítségével:

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Állapítsuk meg közelítően a sor konvergenciatartományát.

Megoldás: A 14. feladatban bemutatott

$$f[2x+Ex]+f[Ex] = 2f(x)$$

azonosságban válasszuk f-et speciálisan a sin x függvénynek. A feladatban igazoltuk, hogy ha az $f(x)$ függvényre zárt alakú addíciós tétel érvényes, az alkalmazható az $f(a+Eb)$ kifejezésre is.

Formálisan tehát

$$\sin(2x+Ex)+\sin(Ex)=2\sin x\,,$$

$$\sin 2x\cos(Ex)+\cos 2x\sin(Ex)+\sin(Ex)=2\sin x\,.$$

De

$$\sin(Ex)=E_1 x-\frac{E_3 x^3}{3!}+-\ldots=0\,,$$

minthogy a páratlan *Euler*-számok 0-val egyenlők. Így

$$\cos(Ex)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{E_{2k}}{(2k)!}x^{2k}=\frac{2\sin x}{\sin 2x}=\frac{1}{\cos x}\,,$$

amit igazolnunk kellett. Minthogy az $x=0$ helyre vonatkozik a sorfejtés, azaz h tetszőlegesen kicsi, a számítás biztosan nem formális. Ha azonban a konvergenciaközt is becsülni akarjuk, fel kell használnunk az E_{2k}-ra az előző feladatban adott becslést. Ennek alapján annyit állíthatunk, hogy a sor a

$$-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$$

intervallumon biztosan konvergens. Megjegyezzük, hogy a B. VI. kötetben pontosabban is meg fogjuk becsülni az E_{2k} mennyiségeket, amiből kiderül, hogy az

$$\frac{1}{\cos x}$$

függvény *Mac Laurin*-sora a

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

közön konvergál.

17. 1. Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg} x-2\operatorname{ctg} 2x\,.$$

2. Írjuk fel ennek és a 10. feladatnak alapján az

$$y=\operatorname{tg} x$$

függvény *Mac Laurin*-sorát! Határozzuk meg a konvergenciatartományt.

18. Határozzuk meg az

$$\frac{x}{\sin x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát és konvergenciatartományát.

19. Fejtsük sorba az

$$y=-\frac{x}{2}\operatorname{th} x$$

függvényt, és állapítsuk meg a konvergenciatartományt.

20. Határozzuk meg az

$$a)\ \ln\cos x, \qquad b)\ \ln\frac{\sin x}{x}, \qquad c)\ \ln\frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

függvény *Mac Laurin*-sorát!

21. Írjuk fel az

$$a)\ \frac{x^2}{1-\cos x}, \qquad b)\ \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \qquad c)\ \ln\frac{x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

függvények *Mac Larin*-sorát.

22. Határozzuk meg az

$$a)\ \frac{1}{e^x+1}, \qquad b)\ \frac{e^x}{e^x+1}, \qquad c)\ \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$$

függvények *Mac Laurin*-sorát.

EREDMÉNYTÁR

1. §. FÜGGVÉNYSOROZATOK ÉS FÜGGVÉNYSOROK VIZSGÁLATA

a)

α

2. A sor x minden értékénél abszolút konvergens, kivéve azt az esetet, amikor x valamilyen negatív egész számmal egyenlő. Ekkor azonban feltételesen sem konvergál a sor, mert végtelen sok tagja nincs értelmezve.

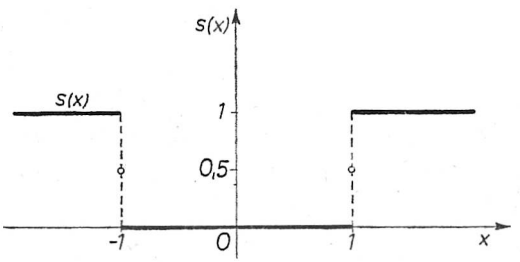
3. A sor x minden értékre abszolút konvergens.

β

1. *a)* A határfüggvény x minden értékénél értelmezett.

b) Lásd a 7. ábrát.

c) Az ábrából azonnal kitűnik.



7. ábra

2. *a)* A határfüggvény x minden értékénél értelmezve van, éspedig

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \equiv 0 \quad (-\infty < x < \infty).$$

b) Lásd a 8. ábrát.

c)

$$|d_{10^3}(x)| > 10^{-4}, \quad \text{ha} \quad 0 < x < 5 - \sqrt{24{,}999999}\,.$$

$$|d_{10^5}(x)| > 10^{-4}, \quad \text{ha} \quad 0 < x < 0{,}05 - \sqrt{0{,}0024\,999999}\,.$$

$$|d_{10^{10}}(x)| > 10^{-4}, \quad \text{ha} \quad 0 < x < 5 \cdot 10^{-7} - \sqrt{2{,}5 \cdot 10^{-13} - 10^{-20}}\,.$$

d) A sorozat egyenletesen konvergál egyrészt a $-\infty < x \leqq -\varepsilon_1$, másrészt az $\varepsilon_2 \leqq x < \infty$ tartományokban, ahol ε_1 és ε_2 tetszőlegesen kicsiny pozitív számok lehetnek.

e) $|d_{10^3}(x)|$ (tehát $|d_{10^5}(x)|$ és $|d_{10^{10}}(x)|$ annál kevésbé) nem nagyobb sehol $\frac{1}{10}$-nél az $1 \leqq x \leqq 2$ tartományban.

3. *a)* A függvény a $-\infty < x < \infty$ szakaszon konvergál.

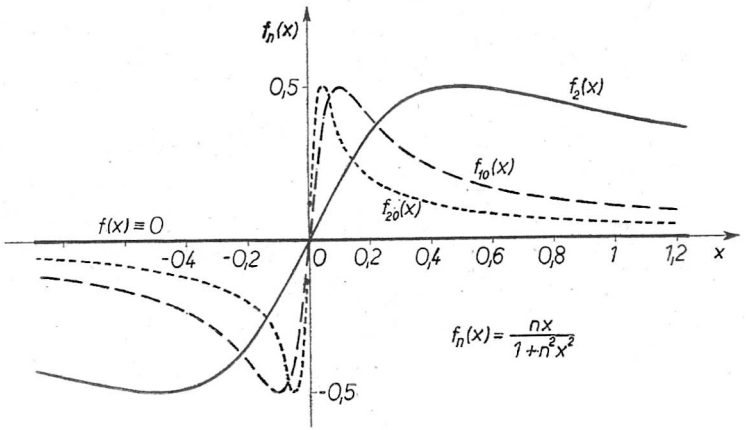
b) A határfüggvény azonosan 1-gyel egyenlő, ha $x \neq 0$; $f(0) = 2$. Lásd a 9. ábrát.

c) $|d_{10^{12}}(x)| > 10^{-2}$, ha $0 < |x| < \sqrt{0{,}99} \cdot 10^{-5}$.

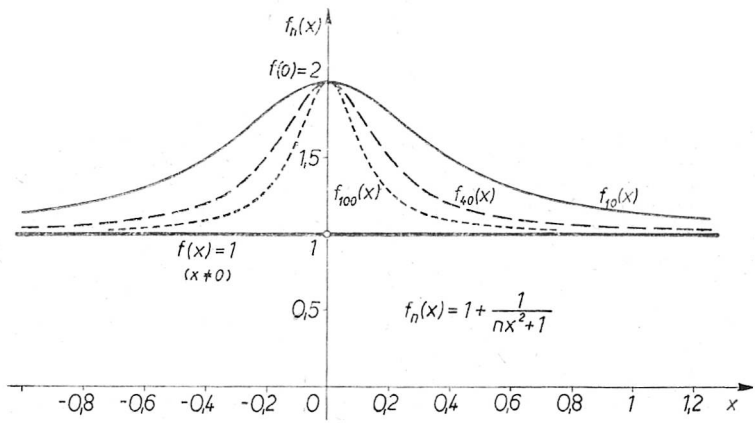
d) A sorozat egyenletesen konvergál a

$$-\infty < x \leqq -\varepsilon_1 \quad \text{ill.} \quad \varepsilon_2 \leqq x < \infty$$

tartományokban, ahol ε_1 és ε_2 tetszőlegesen kicsiny pozitív számok.



8. ábra



9. ábra

4. *a)* A sor egyenletesen konvergens minden olyan zárt intervallumon, amely nem tartalmaz egyetlen negatív egész számot sem.

b) A sor egyenletesen konvergens minden olyan zárt intervallumon, amely nem tartalmaz egyetlen negatív egész számot sem.

5. Gondoljuk meg, hogy $e^{-nx^2} \geqq 1 - nx^2$, azaz $nx\,e^{-nx^2} \geqq nx - n^2x^3$, ha $0 \leqq x \leqq 1$. Ennek alapján könnyen beláthatjuk, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz és n_0 indexhez található olyan x_0 hely a [0, 1] intervallum belsejében ahol

$$d_n(x_0) > \varepsilon\,, \quad \text{ha} \quad n \geqq n_0\,.$$

6. A függvénysor egyenletesen konvergál a [0, 1] intervallumban. Könnyen kimutathatjuk ugyanis, hogy – ha $0 \leqq x$, akkor – a függvénysor n-edik tagja kisebb $\frac{1}{n^2}$-nél, s így az n-edik sormaradék, függetlenül az x helytől, tetszőlegesen kicsiny, ha n már elég nagy.

10.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2n^2 x\, e^{-n^2x^2}\,dx = 1; \qquad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} 2n^2 x\, e^{-n^2x^2}\,dx = 0 \neq 1.$$

Minthogy a függvénysorozat nem konvergál egyenletesen a $[0, 1]$ intervallumon, a határátmenet művelete az integrálással (ebben az esetben) nem cserélhető fel.

11. Az adott sor tagonkénti differenciálásával származó sor nem konvergál egyenletesen egyetlen olyan zárt intervallumon sem, amely a 0 helyett tartalmazza. Ezért nem is konvergál szükségképp a sor az $x = 0$ helyen (de ha konvergálna is, az eredeti sor összegfüggvénye pedig differenciálható lenne a 0 helyen, akkor is megtörténhetne, hogy az összegfüggvény 0 helyen vett differenciálhányadosa nem egyenlő a deriválással származó sor 0 helyen vett összegével).

12. A teljes $-\infty < x < \infty$ intervallumon egyenletesen konvergál a sor.

13.
a) a $-1+\varepsilon_1 \leqq x \leqq 1-\varepsilon_2$ intervallumon;
b) a $-1+\varepsilon_3 \leqq x \leqq 1-\varepsilon_4$ intervallumon;
c) a $-1+\varepsilon_5 \leqq x \leqq 1-\varepsilon_6$ intervallumon;
d) a $-1+\varepsilon_7 \leqq x \leqq 1-\varepsilon_8$ intervallumon;

ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_8$ tetszőlegesen kicsiny pozitív számok.

14.
a) a $-\infty < x < \infty$ közön. *b)* a $-\infty < x < \infty$ közön.
c) a $-\infty < x < \infty$ közön. *d)* a $-1+\varepsilon_1 \leqq x \leqq 1-\varepsilon_2$ közön.
e) a $-1+\varepsilon_3 \leqq x \leqq -\varepsilon_4$ és az $\varepsilon_5 \leqq x < \infty$ közön.
f) a $-\infty < x < \infty$ közön. *g)* a $-\infty < x < \infty$ közön.
h) a $-\infty < x < \infty$ közön. *k)* a $-\infty < x < \infty$ közön,

ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_5$ tetszőlegesen kis pozitív számok.

16. Az $\varepsilon_1 \leqq x < \infty$ intervallumon, ahol ε_1 tetszőlegesen kicsiny pozitív szám.

19. Az $(1-x^n)x^n$ függvény maximuma a $\xi_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$ helyen van, értéke: $\eta_n = \dfrac{1}{4}$.

Ebből már következik, hogy a konvergencia nem lehet egyenletes, minthogy a határfüggvény (a $-1 \leqq x \leqq 1$ intervallumon) az azonosan 1 függvény, az előbbiek szerint pedig a sorozat bármely függvénye legalább egy pontban ettől (nem tetszőlegesen kicsivel, hanem) $\dfrac{1}{4}$-del különbözik.

20.

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{N\to\infty} x\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(x+n^2)^2} = 0. \qquad \lim_{N,\,x\to\infty;\ N=[x]} x\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(x+n^2)^2} = 0.$$

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{x\to\infty} x\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(x+n^2)^2} = 0. \qquad \lim_{N,\,x\to\infty;\ N=[x^2]} x\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(x+n^2)^2} = 0.$$

A két határátmenet sorrendje az adott kifejezésben felcserélhető (sőt bármilyen, az x és az N közötti összefüggés előírása után a két határátmenet szimultán is végezhető) anélkül, hogy a határérték megváltozna, minthogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(x+n^2)^2}$$

sor az $A \leqq x < \infty$ intervallumon egyenletesen konvergens. (Itt A bármilyen pozitív vagy negatív számot jelenthet, $-\infty$-t azonban már nem! Ebből egyébként az is következik, hogy az $N \to \infty$ és az $x \to -\infty$ határátmenetek sorrendje már nem cserélhető fel, vagy legalábbis szimultán határátmenetnél tetszőleges kötésben, pl. $N = [x^2]$ kötésben nem ugyanazt a határértéket kapjuk, mint pl. akkor, ha először az $x \to -\infty$, aztán az $N \to \infty$ határátmenetet végezzük el; stb.).

b)

4. Az $r = \varliminf \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ relációt, továbbá az $\sqrt[n]{n} \to 1$ összefüggést kell felhasználunk.

7. Ha $\vartheta_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$, akkor a hatványsor a $-e < x < e$ közön, ha $0 < \vartheta_n \leq \vartheta < 1$, akkor a $-\infty < x < \infty$ közön konvergál.

8. A sor a $-e < x < e$ közön konvergál.

9. A sor a teljes $-\infty < x < \infty$ közön konvergál.

10. A sor a $-9 < x < 9$ közön konvergál.

2. §. MAC LAURIN-SOROK. TAYLOR-SOROK

a)

α

1. $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$

$$e^x = e^2\left\{1+(x-2)+\frac{(x-2)^2}{2!}+\frac{(x-2)^3}{3!}+\frac{(x-2)^4}{4!}+\dots\right\}.$$

2. $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\dots$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}+--++--\dots\right\}$$

3. $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}--++\dots\right\}.$$

6. *a)*

$$\operatorname{sh} x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\dots$$

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} 1+\operatorname{ch} 1(x-1)+\operatorname{sh} 1\,\frac{(x-1)^2}{2!}+\operatorname{ch} 1\,\frac{(x-1)^2}{3!}+\dots$$

b)

$$\operatorname{ch} x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\dots$$

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch} 1+\operatorname{sh} 1(x-1)+\operatorname{ch} 1\,\frac{(x-1)^2}{2!}+\operatorname{sh} 1\,\frac{(x-1)^3}{3!}+\dots$$

8. $(1+x)^\alpha \sim 1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\binom{\alpha}{4}x^4+\dots = *$

---

* Megjegyezzük, hogy az = jelét csak akkor használjuk, ha tudjuk, hogy a felírt sor a sorba fejtett függvényt azonosan (mindenütt) előállítja, egyébként a $\sim$ jelet használtuk, mint itt is.

$$= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4+\dots$$

$$\ln(1+x) \sim x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-+\dots$$

9. $$\ln x \sim 1+\frac{1}{e}(x-e)+\frac{1}{2e^2}(x-e)^2+\frac{1}{3e^3}(x-e)^3-\frac{1}{4e^4}(x-e)^4\pm\dots$$

11. $$T_5(x) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}.$$

12. $$y = (x-1)^5+4(x-1)^4+4(x-1)^3+(x-1)^2+5(x-1)+15.$$

13. $$y = 7(x-1)^6+39(x-1)^5+90(x-1)^4+110(x-1)^3+76(x-1)^2+29(x-1)+7.$$

14. $$T_4 = \frac{1}{2}\left\{\sin 3+3\cos 3\cdot(x-1)-3^2\sin 3\,\frac{(x-1)^2}{2!}-3^3\cos 3\,\frac{(x-1)^3}{3!}+3^4\sin 3\,\frac{(x-1)^4}{4!}\right\}.$$

15. $$\ln x \sim \ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3-\frac{1}{4\cdot 2^4}(x-2)^4+-\dots$$

16. $$T_3(x) = \operatorname{ar\,ch}\,4+\frac{1}{\sqrt{15}}(x-4)-\frac{4}{\sqrt{15^3}}\,\frac{(x-4)^2}{2!}+\frac{(x-4)^2}{2!\sqrt{15^5}}\left(\frac{16}{5}-1\right).$$

17. $$T_3(x) = \operatorname{th}\,1+\frac{1}{\operatorname{ch}^2 1}\cdot(x-1)-2\,\frac{\operatorname{th}1}{\operatorname{ch}^3 1}\,\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{4\operatorname{ch}^2 1-6}{\operatorname{ch}^4 1}\,\frac{(x-1)^3}{3!}.$$

18. $$\ln\cos x \sim \ln\frac{\sqrt{2}}{2}-1\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-2\,\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-4\,\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}-+\dots$$

19. $$\cos x = \cos a-\sin a\cdot(x-a)-\cos a\,\frac{(x-a)^2}{2!}+\sin a\,\frac{(x-a)^3}{3!}+--++--$$

$$\sin x = \sin a+\cos a(x-a)-\sin a\,\frac{(x-a)^2}{2!}-\cos a\,\frac{(x-a)^3}{3!}++--\dots$$

$$e^x = e^a\left\{1+(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2!}+\frac{(x-a)^3}{3!}+\dots\right\}.$$

$$\ln(5a+x) \sim \ln 6a+\frac{(x-a)}{6a}-\frac{(x-a)^2}{2\cdot(6a)}+\frac{(x-a)^3}{3\cdot(6a)^3}-+\dots$$

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} a+(x-a)\operatorname{ch} a+\frac{(x-a)^2}{2!}\operatorname{sh} a+\frac{(x-a)^3}{3!}+\dots$$

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch} a+(x-a)\operatorname{sh} a+\frac{(x-a)^2}{2!}\operatorname{ch} a+\frac{(x-a)^3}{3!}\operatorname{sh} a+\dots$$

β

1. $f^{(-2)}(x) = \int_a^x (x-\xi) f(\xi)\, d\xi$. $\quad f^{(-3)}(x) = \int_a^x \frac{(x-\xi)^2}{2!} f(\xi)\, d\xi$;

$$f^{(-k)}(x) = \int_a^x \frac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!} f(\xi)\, d\xi;$$

Ezek a formulák közvetlenül következnek a maradéktag integrálalakjából. Ugyanis a definíció szerint:

$$f^{(-k)}(\alpha) = \frac{d}{dx} f^{(-k)}(\alpha) = \ldots = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} f^{(-k)}(\alpha) = 0; \quad \frac{d^k}{dx^k} f^{(-k)}(x) = f(x)$$

és így

$$f^{(-k)}(x) = 0 + 0(x-\alpha) + 0(x-\alpha)^2 + \ldots + \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f(t)\, dt.$$

3.
$$r_n(x) = \binom{\alpha}{n+1} (1+\xi)^{\alpha-(n+1)} \cdot x^{n+1}$$
$$= \binom{\alpha}{n+1} (1+\xi_1)^{\alpha-(n+1)} \cdot (n+1)\, x \cdot (x-\xi_1)^n$$
$$= \binom{\alpha}{n+1} (1+\xi_2)^{\alpha-(n+1)} \cdot \frac{n+1}{k} \cdot x^k (x-\xi_2)^{n+1-k}$$
$$= \int_0^x \binom{\alpha}{n+1} (n+1)(1+t)^{\alpha-(n+1)} \cdot (x-t)^n\, dt.$$

4.
$$r_{10}(x) = \frac{10!}{\xi^{11}} \cdot \frac{(x-3)^{11}}{11!} = \frac{1}{11} \cdot \left[\frac{x-3}{\xi}\right]^{11} = \left(\frac{x-\xi_1}{\xi_1}\right)^{10} \cdot \frac{x-3}{\xi_1}$$
$$= \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{x-\xi_2}{\xi_2}\right)^{11-k} \cdot \left(\frac{x-3}{\xi_2}\right)^k = \int_3^x \left(\frac{x-t}{t}\right)^{10} \cdot \frac{1}{t}\, dt.$$

Legegyszerűbb a *Lagrange*-formula alapján becsülni a hibát. A $2 \leqq x \leqq 4$ szakaszon ugyanis $\left|\frac{x-3}{\xi}\right| \leqq \frac{1}{2}$, tehát a függvény és a sor 10-ik szelete közötti eltérés nem lehet nagyobb, mint $\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2^{11}}$. Elég könnyű azonban a többi — elsősorban az integrál — alak segítségével is a hibabecslés.

γ

2. A függvény minden pontban analitikus.

3. A függvény minden pontban analitikus.

4. A függvény az $x = 0$ hely kivételével minden pontban analitikus.

5. A függvény minden pontban analitikus.

6. A tétel igazolásánál felhasználhatjuk a 2. §-ban a sorokkal végzett műveletekkel kapcsolatban elmondottakat.

9. A függvény az $x = 0$ hely kivételével minden pontban analitikus.

10. A függvény az $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0; \pm 1, \pm 2; \pm 3; \ldots)$ pontok kivételével minden pontban analitikus.

11. A függvény az $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots)$ pontok kivételével minden pontban analitikus.

12. A függvény mindenütt analitikus.

13. A függvény az $x = -$ ar sh 1 pont kivételével mindenütt analitikus.

14. Ez következik a 8. feladatban igazolt eredményekből.

15. A $\sqrt{x}$, illetve általában az x^{α} függvény minden pontban analitikus, kivéve az $x = 0$ pontot, ahol nem analitikus, ha α nem természetes szám, de analitikus, ha természetes szám.

δ

1. Az x_0 helyen a függvényértékek, illetve a deriváltértékek összehasonlítása adja az igazolandó relációkat.

2. Ugyanúgy járhatunk el, mint az 1. feladatban,

3. $$b_k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k}(x_1 - x_0)^k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

6. A 4. és 5. feladatban igazoltak alapján könnyen belátható az állítás. Ugyanis azon intervallumokból, ahol a két hatványsor összegfüggvénye azonos, lépésről lépésre (analitikusan folytatva mindkét sort) el lehet jutni a folytatásokkal az x_0 helyig.

7. Ugyanígy történhet az állítás igazolása, mint a 6. feladatban.

3. §. A MAC LAURIN-, ILLETVE TAYLOR-SOROK SZÁMÍTÁSTECHNIKÁJA

a)

α

2. $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\cos n\alpha\,\frac{x^n}{n!} =$

$$= 1 + x\cos\alpha + \frac{x^2}{2!}\cos 2\alpha + \frac{x^3}{3!}\cos 3\alpha + \dots$$

3. $e^{x\cos\alpha}\cdot\sin(x\sin\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin n\alpha\cdot\frac{x^n}{n!} =$

$$= x\sin\alpha + \frac{x^2}{2!}\sin 2\alpha = \frac{x^3}{3!}\sin 3\alpha + \dots$$

4. $\operatorname{arc\,tg}\, x \sim x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{3n+1}}{2n+1}.$

5. $P_3(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{5}{8}\,\frac{x^3}{3!}.$

6. $P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2!}.$ **7.** $P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2!} - \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{4!}.$

8. $\sqrt[3]{1+\operatorname{tg} x} \cong 1 + x - \frac{1}{9}\,x^2 + \frac{14}{81}\,x^3 \pm \dots$

9. $P_5(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}\,x^2 - \frac{7}{16}\,x^3 + \frac{2447}{5760}\,x^4 - \frac{959}{2304}\,x^5.$

β

1. $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - + \dots$

3. *a)* $y \sim \frac{1}{a}\left[1 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{a^2}\,x^2 + \frac{b^3}{a^3}\,x^3 + \dots\right].$

b) $y \sim \frac{1}{a}\left[1 - \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{a^2}\,x^2 - \frac{b^3}{a^3}\,x^3 + - \dots\right].$

4. $y \sim 1+mx+\binom{-m}{2}x^2-\binom{-m}{3}x^3+-\ldots =$

$$= 1+mx+\frac{m(m+1)}{2!}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4!}x^4+\ldots$$

5. $y \sim a^n\left[1+\binom{n}{1}\frac{x}{a}+\binom{n}{2}\frac{x^2}{a^2}+\ldots\right] =$

$$= a^n\left[1+n\frac{x}{a}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{x^3}{a^3}+\ldots\right].$$

6. $y \sim \frac{1}{a}\left[1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^4}{a^4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^6}{a^6}+-\ldots\right].$

7. $y = 1+x\ln 10+\frac{\ln^2 10}{2!}x^2+\frac{\ln^3 10}{3!}x^3+\frac{\ln^4 10}{4!}x^4+\ldots$

8. $y \sim \frac{1}{\ln b}\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-+\ldots\right].$

9. $y = x^2-\frac{8x^4}{4!}+\frac{32x^6}{6!}-\frac{128x^8}{8!}+-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!}\pm\ldots$

10. $y \sim \ln a+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+-\ldots$

11. $y \sim 2\left(\frac{x}{a}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}+\frac{x^7}{7a^7}+\ldots\right).$

12. $y = 1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2!\,3^2}+\frac{x^3}{3!\,3^3}+\frac{x^4}{4!\,3^4}+\ldots$

13. $y \sim \ln 3+\frac{4x-5x^2}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{4x-5x^2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{4x-5x^2}{3}\right)^3-+\ldots =$

$$= \ln 3+\frac{4}{3}x-\frac{23}{9}x^2+\frac{244}{81}x^3-+\ldots$$

14. $y = 1-\frac{(\sqrt{x}+1{,}4\,x^{3/2})^2}{2!}+\frac{(\sqrt{x}+1{,}4\,x^{3/2})^4}{4!}-+\ldots =$

$$= 1-\frac{x}{2!}-\frac{32{,}6}{4!}x^2-\frac{538{,}6}{6!}x^3-\ldots$$

15. $y = 1+\frac{(x+2x^2)^2}{2!}+\frac{(x+2x^2)^4}{4!}+\frac{(x+2x^2)^6}{6!}+\ldots =$

$$= 1+\frac{x^2}{2!}+2x^3+\frac{49}{4!}x^4+\frac{1}{3}x^5+\ldots$$

γ

3. $y \sim x-x^3+x^5-x^7+x^9-+\ldots$ $\left(\text{mert pl. } \int y(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln[1+x^2]\right)$

4. $y \sim x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+-\ldots$

6. $y \sim x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\ldots\left(\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x}\sim 1-x+x^2-x^3+-\ldots\right)$.

7. $y \sim (2k+1)\frac{\pi}{2}+(-1)^{k-1}\left\{x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\ldots\right\}$.

8. $y \sim 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right)$.

9. $\operatorname{ar\,th}\frac{1}{x}\sim C+x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots$ – kapjuk formálisan. Minthogy azonban a sor csak $|x|<1$ esetben konvergál, ekkor viszont $\left|\frac{1}{x}\right|>1$, amely argumentumokra az ar th függvény nincs értelmezve, a sor egyetlen pontban sem állítja elő a függvényt. C egyébként – illetve épp ezért – nem is adható meg.

δ

3. $\frac{\cos x}{1+x}\sim 1-x+x^2\left(1-\frac{1}{2!}\right)-x^3\left(1-\frac{1}{2!}\right)+x^4\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}\right)-$
$-x^5\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}\right)+x^6\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}\right)-+\ldots$

4. $\frac{\ln(1+x)}{\cos x}\sim x-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+\frac{29}{120}x^5-+\ldots$

5. $(\arcsin x)^2\sim x^2+\frac{x^4}{3}+\frac{8x^6}{45}+\ldots$

6. $e^x\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n}{n!}x^n$, ahol $S_n=2^{\frac{n}{2}}\cdot\sin n\frac{\pi}{4}$,

$e^{-x}\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n}{n!}x_n$, ahol $p_n=(-1)^n\cdot 2^{\frac{n}{2}}\sin n\frac{\pi}{4}$.

7. 1. Ha $|a|\gg|R|$, akkor $\sqrt{\frac{R+a}{R-a}}$ nincs értelmezve.

2. Ha $|a|\ll|R|$, akkor $\sqrt{\frac{R+a}{R-a}}\sim 1+\frac{a}{R}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{R^2}+\frac{1}{2}\frac{a^3}{R^3}\pm\ldots$

8. $\sqrt{1-x}\operatorname{arc\,tg}x\sim x-\frac{x^2}{2}-\frac{11}{24}x^3+\frac{5}{48}x^4\pm\ldots$

9. *a)* $e^{-x}\sec x\sim 1-x+x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{10}x^5+-\ldots$

b) $e^{-\frac{t}{2}}\sin 2t=2t-t^2-\frac{13}{12}t^3+\frac{5}{8}t^4\pm\ldots$

c) $(1+x)\cos\sqrt{x} = 1+\frac{x}{2}-x^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}\right)+x^3\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}\right)-x^4\left(\frac{1}{6!}-\frac{1}{8!}\right)+-\ .$

d) $(1+2v)\arcsin v \sim v+2v^2+\frac{v^3+2v^4}{3}\ \frac{1}{2}+\frac{v^5+2v^6}{5}\ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+$

$$+\frac{v^7+2v^8}{7}\ \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{v^9+2v^{10}}{9}\ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\ldots$$

e) $\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} \sim 1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}\right)\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{x^4}{2^4}+\frac{x^5}{2^5}\right)\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}\right)+$

$$+\left(\frac{x^6}{2^6}+\frac{x^7}{2^7}\right)\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}\right)+\ldots$$

f) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\cos x} \sim 1-\frac{x^4}{3!}-\frac{104}{6!}x^6\mp\ldots$

g) $e^x \operatorname{tg} x \sim x+x^2+\frac{5x^3}{6}+\frac{x^4}{2}+\frac{41}{120}x^5+\frac{71}{360}x^6+\ldots$

h) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}} \sim 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{49}{384}x^4\mp\ldots$

10. b) $\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} \sim \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4k+2}}{4k+2}\sum_{s=0}^{2k}\frac{(-1)^s}{2s+1}\right).$

c) $\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{2}\cdot\ln(1+x^2) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^{k+1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\left(\sum_{s=1}^{2k}\frac{1}{s}\right)\right].$

d) $\dfrac{x}{\ln\dfrac{1}{1-x}} \sim 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{24}-\ldots$

e) $\dfrac{x^2}{x-\ln(1+x)} \sim 2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{8}{135}x^3\pm\ldots$

f) $\frac{1}{2}[\ln^2(1-x)] \sim \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\sum_{s=1}^{n=1}\frac{1}{s}\right).$

ε

3. $y = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2-n^2} \sim 1-2x^2\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+x^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}+\ldots+x^{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k+2}}+\ldots\right\}.$

4. $e^{\sin x} = 1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4!}x^4-\frac{8}{5!}x^5\pm\ldots$

5. $\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{t}{\sin t}-1\right) \sim \dfrac{t}{3!}+\dfrac{7}{3\cdot 5!}t^3+\dfrac{32}{3\cdot 7!}t^5+\dots$

Megjegyezzük, hogy a *Bernoulli*-számok segítségével „zárt" alakban meg tudjuk adni az együtthatókat. Az $\dfrac{1}{\sin t}-\dfrac{1}{t}$ függvény ugyanis a $\ln \dfrac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{t}$ függvény deriváltja. A $\ln \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ függvény sorát a 6. § *γ)* 20. feladatában felírjuk, ebből azonnal adódik $x=\dfrac{t}{2}$ helyettesítéssel a $\ln \dfrac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} =$ $= \ln 2+\ln \dfrac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{t}$ majd, ebből differenciálással az $\dfrac{1}{\sin t}-\dfrac{1}{t}$ függvény *Mac Laurin*-sora is.

6. $e^{e^x}=e+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{k^n}{k!}\right)=e\left(1+x+x^2+\dfrac{5x^3}{3!}+\dfrac{15x^4}{4!}+\dots\right).$

7. $g=g(y)=\dfrac{y}{(1+y^2)^{3/2}}-\dfrac{d}{dy}\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} \sim y-\dfrac{1\cdot 3}{2}y^3+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4}y^5-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}y^7+-\dots$

$$g=g(x)=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}} \sim \frac{1}{2^{3/2}}-\frac{1}{2^{5/2}}x-\frac{5}{2^{7/2}}x^2\mp\dots$$

8. $\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x) \sim \dfrac{1}{30}x^7+\dfrac{29}{756}x^9+\dots$

ζ

3. $\dfrac{5-2x}{6-5x+x^2} \sim \dfrac{5}{6}+x\left(\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{2^2}\right)+x^2\left(\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{2^3}\right)+x^3\left(\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{2^4}\right)+\dots$

5. $\dfrac{x+1}{x-1}=-1+\dfrac{2}{1-x}=1+2x(1+x+x^2+x^3+\dots).$

6. $\sin^3 x=\dfrac{3}{4}\sin x-\dfrac{1}{4}\sin 3x=\dfrac{3}{4}\left\{x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\right\}-\dfrac{1}{4}\left(3x-\dfrac{3^3x^3}{3!}+-\dots\right)=$

$$=6\frac{x^3}{3!}-\frac{39}{2}\frac{x^5}{5!}+-\dots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\frac{3}{4}(3^{2k}-1)\pm\dots$$

$$\cos^4 x=\frac{3}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,4^n(4^{n-1}+1)\cdot\frac{x^{2n}}{2\cdot(2n)!}$$

9. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=-1+\dfrac{2}{1-\operatorname{tg} x} \sim 1+2x+2x^2+\dfrac{8}{3}x^3+\dots.$

10. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^5}{5!}--++\dots\right)$

11. $$y = \frac{-a}{x-\sqrt{\frac{5}{2}}}+\frac{b}{x+\sqrt{\frac{5}{2}}}-\frac{c}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{d}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}} \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{2}{5}}(a+b)+\sqrt{2}(c+d)+x\left[\frac{2}{5}(a-b)+2(c-d)\right]+x^2\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{3/2}(a+b)+2^{3/2}(c+d)\right]+$$

$$+x^3\left[\frac{4}{25}(a-b)+4(c-d)\right]+x^4\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{5/2}(a+b)+2^{5/2}(c+d)\right]+\ldots$$

ahol

$$a=\frac{\sqrt{2}\left(3\sqrt{\frac{5}{2}}-7{,}5\right)}{16\cdot\sqrt{5}}; \qquad b=-\frac{\sqrt{2}\left(3\sqrt{\frac{5}{2}}+7{,}5\right)}{16\cdot\sqrt{5}};$$

$$c=\frac{\sqrt{2}\left(5{,}5-3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{16}; \qquad d=-\frac{\sqrt{2}\left(5{,}5+3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{16}.$$

12. $$\cos(3+x)=\cos 3\cos x-\sin 3\sin x=\cos 3-x\sin 3-\frac{x^2}{2!}\cos 3+$$

$$+\frac{x^3}{3!}\sin 3+\frac{x^4}{4!}\cos 3-\frac{x^5}{5!}\sin 3-\frac{x^6}{6!}\cos 3+ + - - \ldots - -$$

13. $$\operatorname{sh}(4-x)=\operatorname{sh}4\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}4\cdot\operatorname{sh}x=\operatorname{sh}4-x\cdot\operatorname{ch}4+$$

$$+\frac{x^2}{2!}\operatorname{sh}4-\frac{x^3}{3!}\operatorname{ch}4-\frac{x^4}{4!}\operatorname{sh}4-\frac{x^5}{5!}\operatorname{ch}4+-\ldots$$

η

5. $$e^{\operatorname{ar th}x}\sim 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\ldots$$

6. $$y\sim 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4\pm\ldots$$

9. Az inverz $x=\operatorname{arc tg}y=y-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}-+\ldots$

sorfejtés invertálása esetén $\operatorname{tg}x\sim x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{13}{240}x^7+\ldots$

10. $$y(x)\sim x-\frac{5}{4}x^2+\frac{25}{8}x^3-\frac{1879}{192}x^4\pm\ldots$$

A konvergenciakör sugara nagyobb, mint

$$\varrho=2e^{y_0}+y_0-2\sqrt{e^{2y_0}+y_0e^{y_0}},$$

ahol y_0 tetszőleges pozitív számot jelenthet.

11. $u \sim v - v^2 + \frac{11}{6} v^3 - \frac{13}{3} v^4 \pm \dots$

A konvergenciakör sugara nagyobb, mint

$$\varrho = 4\, e^{u_0} + u_0 - 2\sqrt{4\, e^{2u_0} + 2\, u_0\, e^{u_0}}\,,$$

ahol u_0 tetszőleges pozitív számot jelenthet. $u(0{,}1) \approx 0{,}0914$, ahol a hiba nem nagyobb mint 10^{-4}. (A hibabecslést illetően lásd pl. 2. § *a)* η), illetve 4. § β) részt.)

b)

α

1. $T_4(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{10}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + r_4(x)$

ahol pl.

$$r_4(x) = \frac{16(1+\operatorname{tg}^2\xi)^3 + 88\operatorname{tg}^2\xi(1+\operatorname{tg}^2\xi)^2 + 16\operatorname{tg}^4\xi(1+\operatorname{tg}^2\xi)}{5!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5 \quad (|\xi| < |x|)\,.$$

2. $y = (x-1)^5 + 4(x-1)^4 + 8(x-1)^3 + 13(x-1)^2 + 17(x-1) - 1\,.$

3. $y = 7(x-1)^6 + 39(x-1)^5 + 90(x-1)^4 + 110(x-1)^3 + 76(x-1)^2 + 29(x-1) + 7\,.$

4. $\operatorname{th} x \sim x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{13}{240}x^7 + - \dots$

5. $\ln\cos x \ln\sqrt{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \dots$

β

3. $\ln x = \ln[1 + (x-1)] \sim x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-4)^4}{4} + - \dots$

4. $e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x-4}{2}+2} = e^2\left\{1 + \frac{x-4}{2} + \frac{(x-4)^2}{2!\,2^2} + \frac{(x-4)^3}{3!\,2^3} + \dots\right\}.$

5. $\frac{3x-4}{4x^2-8x+3} = \frac{1}{8}\,\frac{1}{x-1{,}5} + \frac{5}{8}\,\frac{1}{x-0{,}5} = -\frac{\frac{1}{4}}{1-2(x-1)} + \frac{\frac{5}{4}}{1+2(x-1)} \sim$

$\sim 1 - 3(x-1) + 4(x-1)^2 - 12(x-1)^3 + 16(x-1)^4 - 48(x-1)^5 +$

$+ 64(x-1)^6 - 192(x-1)^7 + - \dots$

6. *a)* $\cos x = \cos[(x-a)+a] = \cos a\cos(x-a) - \sin a\sin(x-a) =$

$= \cos a - (x-a)\sin a - \frac{(x-a)^2}{2!}\cos a + \frac{(x-a)^3}{3!}\sin a + \frac{(x-a)^4}{4!}\cos a - - + + \dots$

b) $\sin x = \sin[(x-a)+a]\cos a \sin(x-a)+\sin a \cos(x-a) =$

$$= \sin a+(x-a)\cos a-\frac{(x-a)^2}{2!}\sin a-\frac{(x-a)^3}{3!}\cos a+ + - - \ldots$$

c) $e^x = e^{(x-a)+a} = e^a\left\{1+(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2!}-\frac{(x-a)^3}{3!}+\ldots\right\}.$

7. *a)* $\ln(b+x) = \ln[b+a+(x-a)] = \ln(b+a)+$

$$+\ln\left(1+\frac{x-a}{b+a}\right) \sim \ln(b+a)+\frac{x-a}{b+a}-\frac{(x-a)^2}{2(b+a)^2}+\frac{(x-a)^3}{3(b+a)^3}-+\ldots$$

b) $\operatorname{sh} x = \operatorname{sh}[(x-a)+a] = \operatorname{ch} a \operatorname{sh}(x-a)+\operatorname{sh} a \operatorname{ch}(x-a) =$

$$= \operatorname{sh} a+(x-a)\operatorname{ch} a+\frac{(x-a)^2}{2!}\operatorname{sh} a+\frac{(x-a)^3}{3!}\operatorname{ch} a+\ldots$$

c) $\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}[(x-a)+a] = \operatorname{ch} a \operatorname{ch}(x-a)+\operatorname{sh} a \operatorname{sh}(x-a) =$

$$= \operatorname{ch} a+(x-a)\operatorname{sh} a+\frac{(x-a)^2}{2!}\operatorname{ch} a+\frac{(x-a)^3}{3!}\operatorname{sh} a+\ldots$$

8. *a)* $e^{x^2} = e^{(x-a)^2+2ax-a^2} = e^{(x-a)^2}\cdot e^{2a(x-a)}\cdot e^{a^2} =$

$$= e^{a^2}\left\{1+2a(x-a)+\frac{4a^2(x-a)^2}{2!}+\frac{8a^3(x-a)^3}{3!}+\ldots\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{1+(x-a)^2+\frac{(x-a)^4}{2!}+\frac{(x-a)^6}{3!}+\ldots\right\} =$$

$$= e^{a^2}\left\{1+(x-a)\,2a+(x-a)^2(2a^2+1)+(x-a)^3\left(\frac{4a^3}{3}+2a\right)+\ldots\right\}.$$

b) $e^{x^2-2x} = e^{(x-a)^2}\cdot e^{2(a-1)(x-a)}\cdot e^{a^2-2a} =$

$$= e^{a^2-2a}\left\{1+2(a-1)(x-a)+\frac{4(a-1)^2(x-a)^2}{2!}+\frac{8(a-1)^3(x-a)^3}{3!}+\ldots\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{1+(x-a)^2+\frac{(x-a)^4}{2!}+\frac{(x-a)^6}{3!}+\ldots\right\}.$$

c) $\sin x\, e^x = \sin[(x-a)+a]\, e^{(x-a)+a} = e^a\cdot e^{(x-a)}\cdot[\cos a \sin(x-a)+\sin a \cos(x-a)] =$

$$= e^a\left\{1+(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2!}+\frac{(x-a)^3}{3!}+\ldots\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sin a+(x-a)\cos a-\frac{(x-a)^2}{2!}\sin a-\frac{(x-a)^3}{3!}\cos a+ + - - \ldots\right\}.$$

d) $\cos x\, e^x = e^a\cdot e^{x-a}[\cos a \cos(x-a)-\sin a \sin(x-a)] =$

$$= e^a\left\{1+\frac{x-a}{1!}+\frac{(x-a)^2}{2!}+\frac{(x-a)^3}{3!}+\ldots\right\}$$

$$\cdot\left\{\cos a-\sin a\cdot(x-a)-\frac{(x-a)^2}{2!}\cos a+\frac{(x-a)^3}{3!}\sin a+\frac{(x-a)^4}{4!}\cos a- - + + \ldots\right\}.$$

9. *a)* $T_3(x) = \sin a \operatorname{sh} a + (x-a)(\operatorname{ch} a \sin a + \cos a \operatorname{sh} a) +$

$+ (x-a)^2 \cos a \operatorname{ch} a + \dfrac{(x-a)^3}{3!}(2\cos \operatorname{sh} a - 2 \sin a \operatorname{ch} a)$.

b) $T_3(x) = \cos a \operatorname{ch} a + (x-a)(\cos a \operatorname{sh} a - \sin a \operatorname{ch} a) -$

$-(x-a)^2 \sin a \operatorname{sh} a - 2\dfrac{(x-a)^3}{3!}(\cos a \operatorname{sh} a + \sin a \operatorname{sh} a)$.

c) $T_3(x) = \operatorname{sh} a \cos a + (x-a)(\operatorname{ch} a \cos a - \operatorname{sh} a \sin a) -$

$-(x-a)^2 (\sin a \operatorname{ch} a) - 2\dfrac{(x-a)^3}{3!}(\operatorname{ch} a \cos a + \operatorname{sh} a \sin a)$.

d) $T_3(x) = \operatorname{ch} a \sin a + (x-a)(\cos a \operatorname{ch} a + \sin a \operatorname{sh} a) +$

$+ (x-a)^2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a + 2\dfrac{(x-a)^3}{3!}(\operatorname{ch} a \cos a - \operatorname{sh} a \sin a)$.

e) $T_3(x) = 2a \ln(b+a) + (x-a)\left[\ln(b+a) + \dfrac{2a}{b+a}\right] +$

$+ (x-a)^2 \cdot \dfrac{b}{(b-a)^2} + (x-a)^3 \dfrac{0{,}5a - 1{,}5b}{3(b+a)^3}$.

f) $T_3(x) = \operatorname{ch}[a(b+2)] + b(x-a) \operatorname{sh}[a(b+2)] +$

$+ \dfrac{b^2(x-a)^2}{2!} \operatorname{ch}[a(b+2)] + \dfrac{b^3(x-a)^3}{3!} \operatorname{sh}[a(b+2)]$.

g) $T_3(x) = \cos[a(2b-3)] - 2b(x-a) \sin[a(2b-3)] -$

$-4b^2 \dfrac{(x-a)^2}{2!} \cos[a(2b-3)] + \dfrac{8b^3(x-a)^3}{3!} \sin[a(2b-3)]$.

h) $T_3(x) = e^{a(b+1)}\left[1 + b(x-a) + \dfrac{b^2(x-a)^2}{2!} + \dfrac{b^3(x-a)^3}{3!}\right]$.

γ

1. $y(0{,}1) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{0} a_n (0{,}1-0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \dfrac{B_{2k}}{2k(2k)!} 0{,}1^{2k} \approx 0{,}0004;$

$\dfrac{y'(0{,}1)}{1!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} a_{n+1} (0{,}1-0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \dfrac{B_{2k}}{(2k)!} 0{,}1^{2k-2} \approx 0{,}0083.$

$\dfrac{y''(0{,}1)}{2!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} a_{n+2} (0{,}1)^n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \dfrac{B_{2k}(2k-1)}{2 \cdot (2k)!} 0{,}1^{2k-2} \approx 0{,}0417;$

$\dfrac{y'''(0{,}1)}{3!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} a_{n+3} (0{,}1)^n = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \dfrac{B_{2k}(2k-1)(2k-2)}{6 \cdot (2k)!} 0{,}1^{2k-3} \approx 0{,}0001.$

2.
$$y(0{,}01) = 1+\frac{10^{-2}}{2}+\frac{10^{-4}}{12}-\frac{10^{-8}}{720}\pm\ \ldots\ \approx 1{,}00501;$$

$$y'(0{,}01) = \frac{1}{2}+\frac{10^{-2}}{6}-\frac{10^{-6}}{180}\pm\ \ldots\ \approx 0{,}50167;$$

$$\frac{y''(0{,}01)}{2!} = \frac{1}{12}-\frac{10^{-4}}{120}+\frac{10^{-8}}{2016}\pm\ \ldots\ \approx 0{,}08333;$$

$$\frac{y'''(0{,}01)}{3!} = -\frac{10^{-2}}{180}+\frac{10^{-6}}{42\cdot 36}\pm\ \ldots\ \approx -0{,}000\,06;$$

$$\frac{y^{(4)}(0{,}01)}{4!} = -\frac{1}{24\cdot 30}+\frac{10^{-4}}{42\cdot 48}\pm\ \ldots\ \approx -0{,}001\,39;$$

3. $y = (x-3)^5+12(x-3)^4+59(x-3)^3+150(x-3)^2+203(x-3)+120$.

4. $y = (x-5)^7+21(x-5)^6+192(x-5)^5+990(x-5)^4+3100(x-5)^3+$
$+\ 5868(x-5)^2+6184(x-5)+2787\cdot y(4\cdot 98) \cong 2660{,}948$.

5. $y = (x-1)^4+4(x-1)^3+8(x-1)^2+5(x-1)+5\cdot y(0\cdot 99) \cong 4{,}949\,195$.

4. §. A KONVERGENCIAKÖZ ÉS A HIBA VIZSGÁLATÁNAK GYAKORLATI MÓDSZEREI

a)

α

2. A sor az egész számegyenesen a $\cos x$ függvényhez konvergál.

3. A sor az egész számegyenesen az e^x függvényhez konvergál.

4. A sor a $-25 \leqq x < 25$ közön konvergál, és a függvényt állítja elő.

β

1. A sor a $-1 < x < 1$ intervallumon konvergál.

5. A sor a $-1 < x < 1$ szakaszon konvergens.

6.
$$\cos 3x \sqrt{x^2-1} = \cos 3x \sqrt{x+1}\,\sqrt{x-1} =$$
$$= \cos\left[3(x-4)+12\right]\sqrt{5+(x-4)}\cdot\sqrt{3+(x-4)} =$$
$$= \sqrt{15}\left[\cos 12\cdot\cos 3(x-4) - \sin 12\cdot\sin 3(x-4)\right]\sqrt{1+\frac{x-4}{5}}\cdot\sqrt{1+\frac{x-4}{3}},$$

és így a hatványsor csak az $1 < x \leqq 7$ szakaszon konvergál. (A szakasz belsejében a *Cauchy*-tétel, az $x = 7$ pontban a *Mertens*-tétel értelmében konvergens. Minthogy pedig az $x = 1$ helyen nem analitikus a függvény, e szakaszon kívül nem konvergálhat.)

7. A sor a $-1 < x < 3$ szakaszon konvergál.

8. A sor a $-\pi < x < \pi$ szakaszon konvergál.

9. A sor mindenütt konvergens.

11. A hatványsor a $0 < x < 2$ intervallumon konvergál.

γ

2. A sor x minden értékére konvergál.

3. A sor x minden értékére konvergál, ha n természetes szám; a $-a < x \leqq a$ intervallumon, ha n nagyobb -1-nél, a $-a < x < a$ intervallumon, ha $n \leqq -1$.

4. A sor a $-a \leqq x \leqq a$ intervallumon konvergál.

5. A sor a $-2 \leqq x < 4$ intervallumon konvergál.

6. A sor x minden értékére konvergál.

7. A sor x minden értékére konvergens.

8. A sor x minden értékére konvergál.

9. A sor x minden értékére konvergál.

10. A függvény *Mac Laurin*-sorának konvergenciasugara végtelen nagy.

11. A sor a $0{,}3-\sqrt{1{,}29} \leqq x \leqq 0{,}3+\sqrt{1{,}29}$ intervallumon konvergál.

12. A sor x minden értékére konvergál.

13. A sor a $-0{,}5-\sqrt{7{,}25} \leqq x \leqq -0{,}5+\sqrt{7{,}25}$ közön konvergál.

b)

α

2. A hiba biztosan kisebb, mint 1‰, ha $|x| \leqq \sqrt[5]{0{,}12} \approx 0{,}654\,39$.

3. A hiba biztosan kisebb, mint 3‰, ha $-\dfrac{16}{\sqrt[3]{32}} \leqq x \leqq \dfrac{32}{2\cdot\sqrt[3]{22}+1}$.

4. A sor hetedik szelete (hatodfokú polinom) a $-1 \leqq x \leqq 1$ szakaszon már 1‰-nél kisebb hibával közelít, a hatodik szelet viszont még nem.

5. A sor második szelete (elsőfokú polinom) már 0,5‰-nél kisebb hibával közelít a $-0{,}8 \leqq x \leqq 0{,}8$ szakaszon.

8. $\ln 135 \cong 4{,}9053$.

9. A 0,2 helyen az elkövetett hiba nem nagyobb, mint $\dfrac{0{,}2^7}{7!} \sim 2{,}5\cdot 10^{-9}$;

a 0,5 helyen az elkövetett hiba nem nagyobb, mint $\dfrac{0{,}2^7}{7!} \sim 1{,}55\cdot 10^{-6}$;

a 2 helyen az elkövetett hiba nem nagyobb, mint $\dfrac{2^7}{7!} \sim 2{,}54\cdot 10^{-2}$.

β

β_1) **2.** $\ln 2 \cong 0{,}693\,15$.

3. $\ln \pi \cong 1{,}144\,74$; $\operatorname{ar\,ctg} 5{,}28 \cong 1{,}383\,6$; $\operatorname{ar\,sh}(-0{,}17) + \operatorname{ar\,th} 0{,}17 \cong 0{,}002\,471$

4. $\dfrac{1}{0{,}99} \cong 1{,}010\,1$.

5. A hiba nem nagyobb, mint $\dfrac{0{,}1^7}{7}\cdot\dfrac{1}{1-0{,}1} \cong 1{,}587\,3\cdot 10^{-8}$.

7. A $|x| \leqq 0{,}564$ intervallumon még biztosan kisebb a hiba, mint $0{,}3\cdot 10^{-3}$.

β_2) **2.** $\operatorname{arc\,tg} e = 1{,}184\,83$. **3.** $\sqrt{1{,}2} \cong 1{,}095\,46$.

5. $\sqrt{10} \cong 3{,}162\,3$. **6.** $\operatorname{ar\,th} 0{,}5 \cong 0{,}354\,3$. **8.** $\sqrt[3]{9} \cong 2{,}080\,085$.

5. §. A TAYLOR-SOROK NÉHÁNY ALKALMAZÁSI TERÜLETE

a)

α

1. $y(x) = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - + \dots$

2. $I(y) = y + \frac{1}{2}\,\frac{y^2}{2!} + \frac{1}{3}\,\frac{y^3}{3!} + \frac{1}{4}\,\frac{y^4}{4!} + \dots$

3. $y(x) \sim x - \frac{1}{9}\,x^3 + \frac{x^5}{18} - + \dots$

4. $Shi(x) = x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots$

és

$Si(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + - \dots$

5. $y(x) \sim x - \frac{1}{2}\,\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^9}{9} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,\frac{x^{13}}{13} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\,\frac{x^{17}}{17} - \dots$

6. $Ei(y) \sim e\left\{y - 1 + \frac{(y-1)^3}{3!} + \frac{(y-1)^4}{4!}\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) + \right.$

$\left. + \frac{(y-1)^5}{5!}\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\right) + \frac{(y-1)^5}{6!}\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\right) + \dots\right\}.$

$Ei(y) \sim \int_1^{100} \frac{e^\xi}{\xi}\,d\xi + \left\{(y-100) + \frac{(y-100)^3}{2}\left(1 - \frac{1}{100}\right) + \frac{(y-100)^3}{3} \cdot \right.$

$\left. \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2}\right) + \frac{(y-100)^4}{4}\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{100 \cdot 2!} + \frac{1}{100^2} - \frac{1}{100^3}\right) + \dots\right\} \cdot \frac{e^{100}}{100}.$

7. $Li(z) \sim (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2^2} + \frac{(z-1)^3}{3^2} - \frac{(z-1)^4}{4^2} + \frac{(z-1)^5}{5^2} - + \dots$

$Li(z) \sim \int_1^{100} \frac{\ln \xi}{\xi - 1}\,d\xi + \frac{1}{99}\left\{(x-100)\ln 100 + \frac{(x-100)^2}{2}\left(\frac{1}{100} - \frac{\ln 100}{99}\right) - \right.$

$$-\frac{(x-100)^3}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100^2}+\frac{1}{99\cdot 100}-\frac{\ln 100}{99^2}\right)+$$

$$+\frac{(x-100)^4}{4}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{100^3}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{99\cdot 100^2}+\frac{1}{99^2\cdot 100}-\frac{\ln 100}{99^2}\right)-+\ldots\Bigg\}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = -Li(0) = \frac{\pi^2}{6}$$ (l. a sorozat B. VI. kötetének 4. §-át).

8. $$I(x) = x+\frac{x^2}{2\cdot 2!}(1+3^2)+\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^4}{4\cdot 4!}(1-3^4)+\frac{x^5}{5\cdot 5!}+$$

$$+\frac{x^6}{6\cdot 6!}(1+3^6)+\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\frac{x^8}{8\cdot 8!}(1-3^8)+\ldots$$

9. $$I(y) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{4!}\right)+\frac{x^4}{4}\left(\frac{1}{3!}-\frac{2}{6!}\right)+\frac{x^6}{6}\left(\frac{1}{4!}+\frac{2}{8!}\right)+\frac{x^8}{8}\left(\frac{1}{5!}-\frac{2}{10!}\right)+$$

$$+\frac{x^{10}}{10}\left(\frac{1}{6!}+\frac{2}{12!}\right)+\ldots$$

10. Az $f(z) = \int_0^z \frac{e^{x^2}-x\sin x-1}{x^{7/2}}\,dx$ függvény nem fejthető *Mac Laurin*-sorba, mert az $x=0$ helyen nem analitikus. Ezzel szemben megadható egy olyan hatványsor, amely az $\frac{f(z)}{\sqrt{z}}$ függvényt állítja elő:

$$\frac{f(z)}{\sqrt{z}} = \frac{2}{3}z\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)+\frac{2}{7}z^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}\right)+\frac{2}{11}z^5\left(\frac{1}{4!}+\frac{1}{7!}\right)+\frac{2}{15}z^7\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{9!}\right)+$$

$$+\frac{2}{19}z^9\left(\frac{1}{6!}+\frac{1}{11!}\right)+\ldots$$

β

2. Az $$y \sim 1-\frac{1}{2}\alpha\sin^2 x-\frac{1}{2\cdot 4}\alpha^2\sin^4 x-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\alpha^3\sin^6 x-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\alpha^4\sin^8 x-\ldots$$

sor minden olyan zárt $[a, b]$ tartományban egyenletesen konvergál, amely tartományban x minden értékére fennáll az $|a\sin^2 x| \leqq 1$ egyenlőtlenség. (Ha átrendezzük x hatványai szerint, akkor ez távolról sem igaz!) Az

$$I(x) \sim x-\frac{1}{2}\alpha\int_0^x \sin^2 t\,dt-\frac{1}{2\cdot 4}\alpha^2\int_0^x \sin^2 t\,dt-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\alpha^3\int_0^x \sin^6 t\,dt-\ldots$$

abban a $[-A, A]$ zárt tartományban biztosan egyenletesen konvergál, amelynek minden pontjára fennáll az $[a\sin^2 x[\leqq 1$ reláció, de ennél nagyobb az egyenletes konvergencia tartománya; éspedig akkora $[-B, B]$ közön konvergál egyenletesen az $I(x)$-et definiáló sor, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha|^n \int_0^B \sin^{2n} t\,dt = 1\,,$$

3. $I(y) \sim y - \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^3}{3^2} - \frac{y^4}{4^2} + - \ldots$

A sor a $1 \leqq y \leqq 1$ közön egyenletesen konvergál. Ha $|y| > 1$, a sor nem konvergens.

4. $\int_0^x e^{-u^2} \cdot u^3 \, du = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8 \cdot 2!} - \frac{x^{10}}{10 \cdot 3!} + \frac{x^{12}}{12 \cdot 4!} - \frac{x^{14}}{14 \cdot 5!} + - \ldots$

A sor x minden értékére konvergál.

γ

3. $\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{x} \, dx \cong 1{,}8922$; $\int_0^1 \frac{\cos x}{e^x} \, dx \cong 0{,}5554$;

$\int_0^{\pi} e^{\sin x} \, dx \cong 6{,}2091$; $\int_0^{0{,}2} \frac{\ln(1+x)}{x} \, dx \cong 0{,}190\,88$;

$\int_0^{0{,}3} \frac{\sin x}{x} \, dx \cong 0{,}2985$; $\int_0^{0{,}5} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \cong 0{,}2069$; $\int_0^{0{,}2} \frac{1-\cos x}{x^{3/2}} \, dx \cong 0{,}0298$.

b)

α

3. *a)* $t \cong 11{,}946\,718$, és a hiba kisebb, mint 10^{-6}
b) $t \cong 11{,}946\,7$, és a hiba kisebb, mint 10^{-4}
c) $t \cong 11{,}946\,718$, és a hiba kisebb, mint 10^{-6}.

5. Ha $\frac{2K}{\sqrt{40K - r^2}} \ll 1$, akkor a $K^2 - \left(DK - \frac{r^2}{4}\right)\left[\frac{5}{6}\left(1 - \sqrt{37 - 36\,t_m}\right)\right] = 0$,

ha $\frac{2K}{\sqrt{4DK - r^2}} \gg 1$, akkor az $\frac{5}{6} K^2\left(1 - \sqrt{37 - 36\,t_m}\right) - DK + \frac{r^2}{4} = 0$

egyenlet alapján kell K értéket számítanunk.

6. A gémeskút arc tg $\frac{1}{400}$, azaz

$$\frac{1}{400} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{400^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{400^5} - + \ldots \cong 0{,}0025$$

radiánnyi szög alatt látható.

8. A Hold – Föld távolság $\frac{1}{\operatorname{tg} 10'} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6 \cdot 180}}$-szor akkora, mint a holdátmérő.

Minthogy

$$\operatorname{tg} 10' = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6 \cdot 180} \cong \frac{\pi}{6 \cdot 180} + \frac{1}{3} \frac{\pi^3}{6^3 \cdot 180^3} + \frac{2}{15} \frac{\pi^5}{6^5 \cdot 180^5} \cong 0{,}002\,92\,,$$

így $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 10'} \cong 342{,}5\,.$

10. Ha a kérdéses idő alatt megtett szöget φ-vel jelöljük, az eltérés

$$R \sqrt{2(1-\cos\varphi)+\varphi^2-2\varphi\sin\varphi} \cong R\,\frac{\varphi^2}{2}$$

-vel egyenlő, ha φ elég kicsi. Így egy másodperc alatt az eltérés jó közelítéssel $3{,}06 \cdot 10^{-6}$ km, egy perc alatt pedig $1{,}102 \cdot 10^{-2}$ km, azaz 11,02 m.

β

3. $$a \cong n\alpha' + \frac{n(1-n^2)}{3!}\alpha'^3 + \frac{n(1-10n^2+9n^4)}{5!}\alpha'^5\,.$$

4. Az egyenletből: $$2\left(\frac{\Delta l}{2d}\right)^2 = n^2 - \sin^2\alpha\,.$$

Rögtön látható, hogy α páros függvénye Δl-nek, tehát

$$\alpha \sim A_0 + A_2(\Delta l)^2 + A_4(\Delta l)^4 + \ldots$$

Ebben az alakban azonban nem helyettesíthetjük α-t, mert így az ismeretlen együtthatók szorzói a kijövő egyenletrendszerben végtelen sorok lennének. Könnyen megállapítható azonban, hogy $A_0 = \alpha(\Delta l = 0) = \arcsin n$. „gy az eredeti egyenletet átírva az

$$\alpha - \arcsin n = A_2(\Delta l)^2 + A_4(\Delta l)^4 + \ldots$$

változóra:

$$2\left(\frac{\Delta l}{2d}\right)^2 = n^2 - \sin^2[(\alpha - \arcsin n) + \arcsin n] = n^2 - \{(1-n^2)\sin^2(\alpha - \arcsin n) +$$

$$+ 2n\sqrt{1-n^2}\sin(\alpha - \arcsin n)\cdot\cos(\alpha - \arcsin n) + n^2\cos^2(\alpha - \arcsin n)\}\,,$$

amiből:

$$\alpha \sim \arcsin n - \frac{(\Delta l)^2}{4d^2 n\sqrt{1-n^2}} + \frac{(2n^2-1)(\Delta l)^4}{32 n^3 (1-n^2)^{3/2} d^4} - + \ldots$$

6. $$t = t(x) \sim \frac{x}{\omega} + \frac{\delta^2}{\omega^2}x^2 + \frac{9\delta^2+\omega^2}{6\omega^3}x^3 + \ldots$$

γ

2. $$v(t) \sim \sqrt{\frac{p\gamma}{\varrho_0}}\left\{1 + \frac{\alpha}{2}t - \frac{\alpha^2}{2\cdot 4}t^2 + \frac{3\alpha^3}{2\cdot 4\cdot 6}t^3 - \frac{3\cdot 5\,\alpha^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}t^4 + - \ldots\right\}$$

hacsak $-1 < \alpha t \leqq 1$, illetve

$$v(t) \sim \sqrt{\frac{p\gamma}{\varrho_0}\alpha t}\left\{1 + \frac{1}{2\alpha t} - \frac{1}{2\cdot 4\,\alpha^2 t^2} + \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \alpha^3 t^3} - + \ldots\right\} \text{ hacsak } |\alpha t| > 1\,.$$

3. $$m \sim m_0\left\{1+\frac{v^2}{2c^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{v^4}{c^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{v^6}{c^6}+\ldots\right\}.$$

Ahhoz, hogy $\left|\frac{v}{c}\right| \leqq 0{,}9$ esetén a közelítés hibája $0{,}1\,^0/_{00}$-nél ne legyen nagyobb, kb. a sorfejtés első 30 tagját figyelembe kell venni.

4. $$C_p - C_v \sim R + \frac{2a(v-b)^2}{v^4 R}\cdot\frac{1}{T}+\frac{4a^2(v-b)^4}{v^8 R}\cdot\frac{1}{T^2}+\ldots$$

5. $$\lambda \sim \frac{h}{\sqrt{2mE}}\left\{1+\frac{U}{2E}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{U^2}{E^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{U^3}{E^3}+\ldots\right\}$$

6. $$n \sim 1-\frac{U}{2E}-\frac{1}{2\cdot 4}\,\frac{U^2}{E^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{U^3}{E^3}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\,\frac{U^4}{E^4}-\ldots$$

8. $$V=\frac{m_0}{e}c^2\left\{\frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{v^4}{c^4}+\ldots\right\}=\frac{m_0 v^2}{2e}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{m_0 v^4}{e\cdot c^2}+\ldots$$

11. $$x \sim \frac{1}{2}gt^2+\frac{7}{24}\,\frac{g^3 t^4}{c^2}+\frac{69}{480}\,\frac{g^5 t^6}{c^4}+\ldots$$

δ

3. $$U \sim 9RT\left\{\frac{1}{3}-\frac{\Theta}{8T}+\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{B_\nu \Theta^\nu}{T^\nu(\nu+3)\,\nu!}\right\}\qquad\left(T<\frac{\Theta}{2\pi}\right)$$

$$C_v=\frac{dU}{dT}=3R-9R\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{B_\nu\cdot\Theta^\nu\cdot(\nu-1)}{T^\nu\cdot(\nu+3)\cdot\nu!}.$$

6. Az integrált átalakítva, majd $\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$-t sorba fejtve és integrálva:

$$\int_0^h\frac{2a\,dx}{\sqrt{2g(h-x)(2ax-x^2)}}=\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^h\frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}\sim$$

$$\sim\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{h}{2a}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(\frac{h}{2a}\right)^2+\left(\frac{5!!}{6!!}\right)^2\left(\frac{h}{2a}\right)^3+\ldots+\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\left(\frac{h}{2a}\right)^n\ldots\right\}$$

Egyébként az $x=h\sin^2\varphi$; $k^2=\frac{h}{2a}$ helyettesítések után az 5. feladat mintájára is megoldható a feladat.

ε

2. $$v(p)\cong v_0+\varkappa\cdot(p-p_0)+\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right)_{T=\text{const};\ p=p_0}\frac{(p-p_0)^2}{2!}$$

3. $$x\cong x_0+v(t-t_0)+a\,\frac{(t-t_0)^2}{2!}+b\,\frac{(t-t_0)^3}{3!},$$

ahol $$v=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0};\qquad a=\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=t_0};\qquad b=\left.\frac{d^3x}{dt^3}\right|_{t=t_0}$$

4. *a)* Legfeljebb másodfokú polinom lehet

b) $z = z(\omega) \cong z_0 + \left[\frac{dz}{d\omega}\right]_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \left[\frac{d^2 z}{d\omega^2}\right]_{\omega_0} \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2!}$

c)

1. Ha $|x| \leqq \frac{0.4}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{0,4}{\sqrt{6}}}} \cong 0{,}155$, akkor biztosan kisebb a hiba 1%-nál.

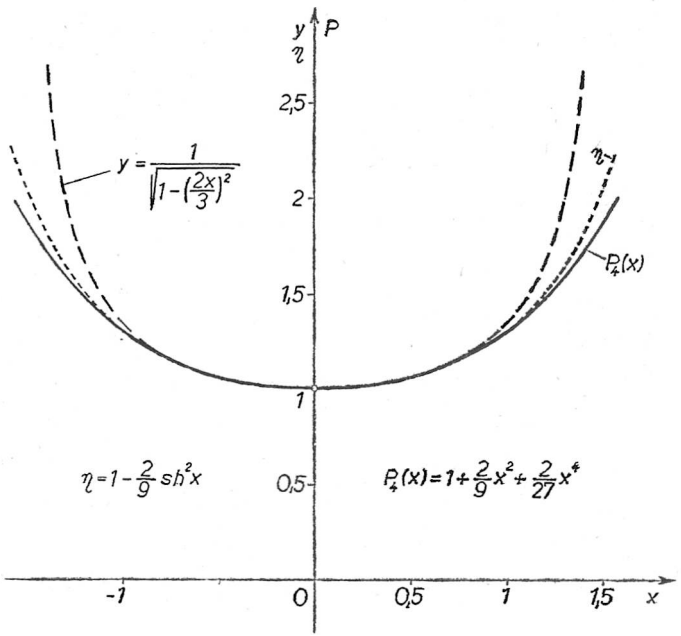
3. $e^{0,5} \cong 1{,}6487$. **4.** $\sqrt{63} \cong 7{,}93\,725$.

5. A felső hibahatár nem nagyobb $\frac{1}{7!} \cong 0{,}0002$-nél.

6. A ch x függvényt az $1 + \frac{x^2}{2}$ parabola 1%-osnál kisebb hibahatárral közelíti, ha

$$|x| \leqq \sqrt{\frac{\sqrt{3001}-1}{250}} \cong 0{,}464 .$$

7. Ha a függvényt az $x = 0$ helyen fejtjük sorba, akkor a 6-odfokú *Mac Laurin*-sorszelet még 1%-nál kisebb hibával közelít, az 5-ödfokú már nem; az $x = \frac{1}{4}$ helyen sorbafejtve, a *Taylor*-sor harmadik szelete (másodfokú polinom) még 1%-nál kisebb hibával közelít.



10. ábra

8. Ehhez $\ln(1+x)$ *Mac Laurin*-sorának legalább a 22-edik szeletét kell használnunk.

9. $$\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{3}+x-\sqrt{3}\,\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}+\sqrt{3}\,\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}-\sqrt{3}\,\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}++--\ldots\right\}$$

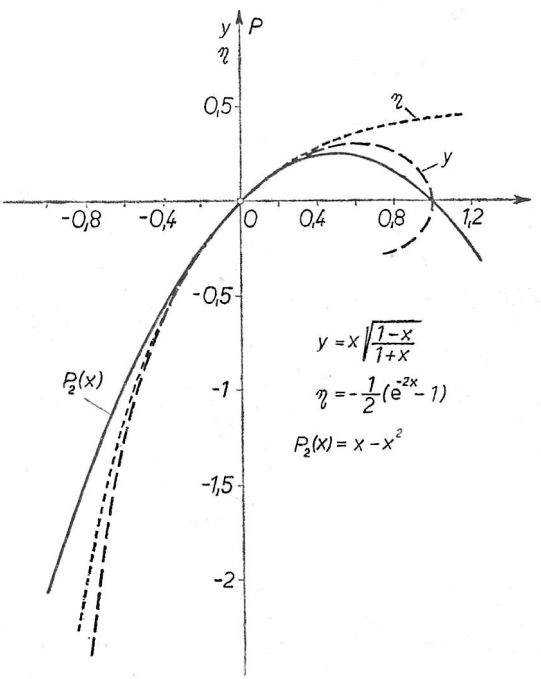
10. $$y=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\frac{x^4}{5!}+\ldots$$

11. $$y=x^5-\frac{x^9}{3!}+\frac{x^{13}}{5!}-\frac{x^{17}}{7!}+\quad\ldots$$

12. $$y\cong 1-\frac{3}{4}x^2-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}\cdot 3^2x^4-\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}\cdot 3^3x^6-\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}\cdot 3^4x^8-\ldots$$

13. Ha $|x|\leqq\sqrt{\frac{567}{2\pi^2}}\cong 1{,}5215$.

14. $\operatorname{arc\,tg}\,0{,}01\cong 0{,}009\,999\,67$.



11. ábra

15. $\ln 4\cong 1{,}3863$; $\ln 6\cong 1{,}801$; $\ln 8\cong 2{,}7726$.

16. $\sqrt[5]{35}\cong 2{,}036\,16$.

17. $\pi\cong 3{,}141\,593$.

18. $\sqrt[3]{28}\cong 3{,}036\,59$.

19. $\sqrt[10]{1{,}1}\cong 1{,}0096$; $\sqrt[5]{40}\cong 2{,}190$.

20. $$\frac{1}{1013}\cong 0{,}000\,987\,166\,8.$$

21. $$\frac{1024}{976}=\frac{1+0{,}024}{1-0{,}024}\cong 1{,}049\,18.$$

22. $$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}\sim 1+\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}x^2+\frac{44}{162}x^3+\ldots$$

23. *a)* $a=-\frac{4}{9}$; $b=-\frac{2}{9}$.

b) $a=-\frac{1}{2}$; $b=-2$.

c) $a=b=\pm\sqrt{2}$.

(L. a 10–11. ábrákat!)

25. $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{8+1}\cong 2{,}0833\ldots$, és a hiba abszolút értéke nem nagyobb $\frac{1}{288}$-nál;

$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{3^3+3}\cong 3{,}111$, és a hiba abszolút értéke kisebb $\frac{1}{243}$-nál;

$\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{4^3+4} \cong 4{,}0833\ldots$ és a hiba abszolút értéke kisebb $\frac{1}{576}$-nél;

$\sqrt[3]{140} = \sqrt[3]{5^3+15}$ és a hiba abszolút értéke kisebb $\frac{1}{125}$-nél.

26. Ha $\frac{x}{a^n}$ negatív, akkor a hiba előjele épp fordítottja a előjelének (éppúgy, mintha $\frac{x}{a^n}$ pozitivitását kötjük ki), és $\left|\frac{x}{a^n}\right| < 1$ esetében a hiba kisebb, mint $\frac{n-1}{2n^2} \cdot \left|\frac{x^2}{a^{n-1}} \cdot \frac{1}{a^n - x}\right|$.

27. $\sqrt[5]{35} \cong 2{,}0375$, és a hiba abszolút értéke kisebb $\frac{9}{6400}$-nál.

$\sqrt[7]{2190} \cong 3 + \frac{1}{1701} \cong 3{,}000\,588$, és a hiba abszolút értéke kisebb $\frac{1}{3^{10} \cdot 49}$-nél.

$\sqrt[8]{260} \cong 2 + \frac{1}{256} \cong 2{,}003\,906$, és a hiba abszolút értéke kisebb $\frac{7}{2^{18}}$-nál.

$\sqrt[10]{1030} \cong 2 + \frac{3}{2560} \cong 2{,}001\,171\,8$, és a hiba abszolút értéke kisebb, $\frac{9}{25 \cdot 2^{18}}$-nál.

28. *a)* Ha $|x| \leqq \sqrt{\frac{3}{25\pi}} \cong 0{,}1954 \cong 11{,}17°$,

b) ha $|x| \leqq \sqrt[4]{\frac{2{,}4}{\pi}} \cong 0{,}9351 \cong 53{,}3°$,

c) ha $|x| \leqq \sqrt{\frac{-0{,}12+\sqrt{0{,}9744}}{2}} \cong 0{,}65\,85 \cong 37{,}63°$,

d) ha $|x| \leqq 1{,}156 \cong 66{,}07°$,

e) ha $|x| \leqq 0{,}173 \cong 10°$

f) ha $|x| \leqq 0{,}5623 \cong 32{,}14°$,

g) ha $-\frac{0{,}02}{1{,}02} \leqq x \leqq \frac{0{,}02}{1{,}01}$,

h) ha $-0{,}3 \leqq x \leqq 0{,}3\,28$

akkor a hiba biztosan kisebb, mint 1%. Megjegyezzük, hogy minthogy e faladatokban a relatív hibát kellett becsülnünk, szükségünk volt a szereplő függvények abszolút értékének alsó becslésére. A sin x függvényt ezért az $|x| \leqq \frac{\pi}{2}$ intervallumban a $\frac{2}{\pi}|x|$-szel, a cos x függvényt az $|x| < 3$ intervallumon $1 - \frac{x^2}{2}$-vel, a $|\operatorname{tg} x|$ függvényt $|x|$-szel, az $|\ln(1+x)|$ függvényt pedig x negatív értékeire $|x|$-szel, x pozitív értékeire $x - \frac{x^2}{2}$-vel becsültük alulról. Megjegyezzük azonban, hogy ha így másodnál magasabb fokú egyenlőtlenségek adódtak, megelégedtünk viszonylag durvább becslésekkel.

6. §. FÜGGELÉK

α

4. $\dfrac{x}{1-x} \sim -1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\ldots$

5. $\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| \sim \dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{3x^3}+\dfrac{2}{5x^5}+\dfrac{2}{7x^7}+\dfrac{2}{9x^9}+\ldots$

6. $\sqrt{x^2-a} \sim x-\dfrac{1}{2}\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{2\cdot 4}\dfrac{a^2}{x^3}-\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\dfrac{a^3}{x^9}-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\dfrac{1^4}{x^7}-\ldots$

8. $y \sim \dfrac{2}{3}-\dfrac{23}{9}\dfrac{1}{x}+-\ldots$ és így $y \to \dfrac{2}{3}$, ha $x \to \infty$.

9. $\operatorname{ar\,sh} x \sim \ln 2x+\dfrac{1}{2\cdot 2}\cdot\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{1}{4x^4}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\dfrac{1}{6x^6}-+\ldots$

β

3. $\dfrac{1}{\sin t}-\dfrac{1}{t} \to 0$ éspedig $\dfrac{1}{\sin t}-\dfrac{1}{t} = O\left(\dfrac{t}{6}\right)$. ha $t \to 0$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-x+x-1}{1-\sqrt{1-x^2}} = 3.$ **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x^2}-2-x^2}{[e^{x^2}-\cos x]\cdot\sin x^2} = -\dfrac{1}{11}.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{tg} x} = -\dfrac{1}{2}$, éspedig $\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{tg} x} = - \quad = O(x^2)$, ha $x \to 0$.

γ

2. $B_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{B_1}{1!}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+\dfrac{B_n}{n!} = \dfrac{1}{n!}(x+B)^n$

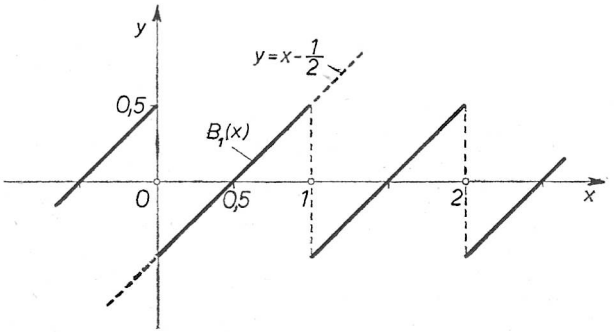
6. L. a 12., 13. stb. ábrákat!

10. A 6. § γ) η) 8. feladatban közölt

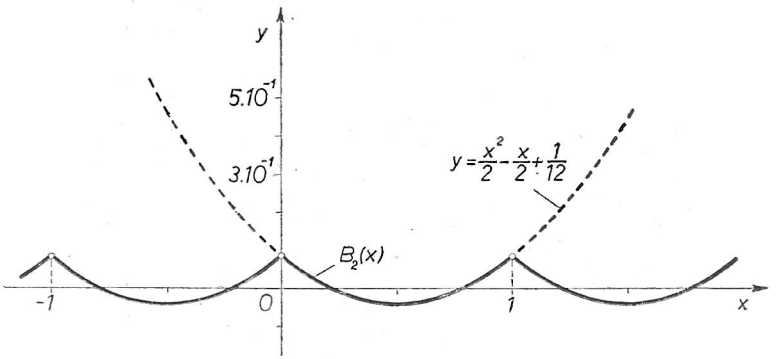
$$f(Bh)-f(Bh-h) \equiv hf'(0)$$

képletet alkalmazva az $f(x) = \sin 2x$ választással; felhasználva az ugyancsak a 8. feladatban az addiciós formulákkal kapcsolatban igazolt állítást és a $\sin Bx = \dfrac{x}{2}$ relációt, a következő adódik:

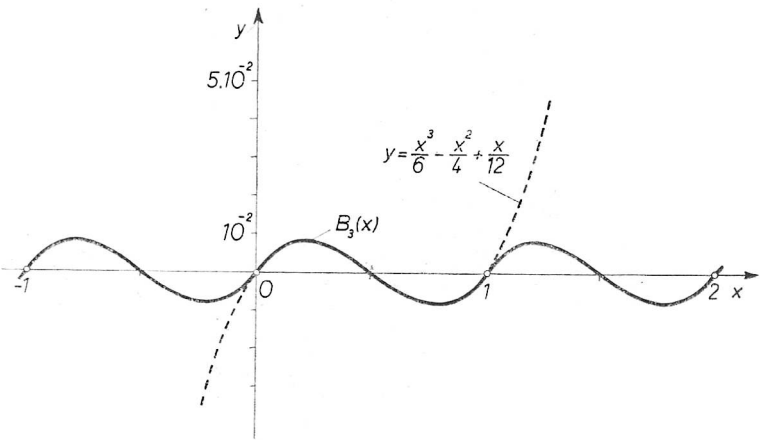
$$x \operatorname{ctg} x \sim \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}.$$



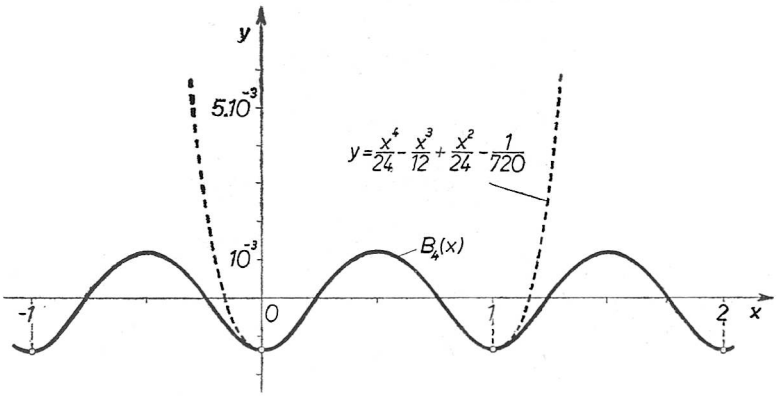
12. ábra



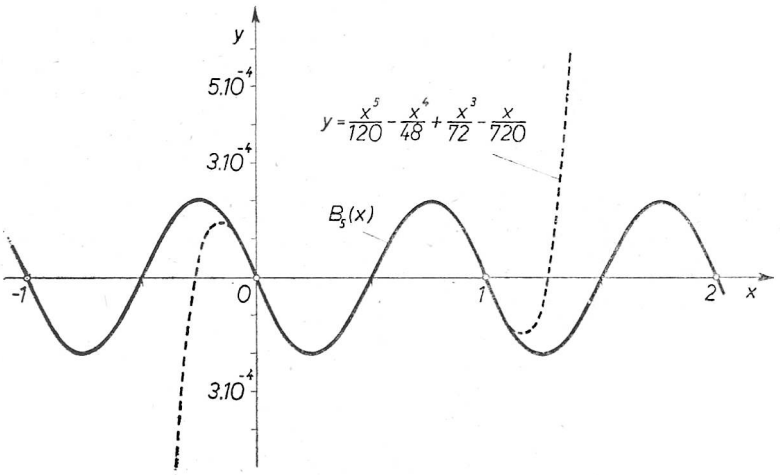
13. ábra



14. ábra



15. ábra



16. ábra

A konvergenciaköz sugara π-vel egyenlő, de az $x = \pm \pi$ helyeken már nem konvergál a sor.

17. $$\operatorname{tg} x \sim \sum_{k=1}^{\infty}{}' (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}.$$

A konvergenciaköz sugara $\frac{\pi}{2}$-vel egyenlő, de az $x = \pm \frac{\pi}{2}$ helyeken már nem konvergál a sor.

18. Felhasználva, hogy

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sin x}, \quad \text{azaz} \quad x \operatorname{ctg} x + x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{x}{\sin x},$$

a következőket kapjuk:

$$\frac{x}{\sin x} \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{2\,(2^{2k-1}-1)\,B_{2k}}{(2k)!}\, x^{2k}.$$

A konvergenciaköz sugara π-vel egyenlő, de az $x = \pm\pi$ helyeken nem konvergál a sor.

19. Az $y = -\frac{x}{2}\,\mathrm{th}\,x$ függvény *Mac Laurin*-sorát a 4. § *b) η)* 14. feladat mintájára első lépésben az $f(x) = \mathrm{sh}\,2x$ választással az $x\,\mathrm{cth}\,x$, majd ebből a $\mathrm{th}\,x$, stb. *Mac Laurin*-sorát kiszámítva határozhatjuk meg. Így:

$$-\frac{x}{2}\,\mathrm{th}\,x \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}\,(2^{2k}-1)\,B_{2k}}{(2k)!}\, x^{2k}.$$

A konvergenciaköz sugara $\frac{\pi}{2}$-vel egyenlő, az $x = \pm\frac{\pi}{2}$ helyeken a sor még konvergens.

20. *a)* $\frac{d}{dx}\ln\cos x = -\operatorname{tg} x$, és így $\ln\cos x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}\,(2^{2k}-1)}{2k\cdot(2k)!}\, x^{2k}$.

b) $\frac{d}{dx}\ln\frac{\sin x}{x} = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\,(x\operatorname{ctg} x - 1)$,

$$\ln\frac{\sin x}{x} \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}\,B_{2k}}{2k\cdot(2k)!}\, x^{2k}.$$

c) $\frac{d}{dx}\ln\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{x}\,(x\operatorname{ctg} x - 1)$, és így

$$\ln\frac{\operatorname{tg} x}{x} \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}\,(2^{2k-1}-1)\,B_{2k}}{k\cdot(2k)!}\, x^{2k}.$$

21. *a)* $\int \frac{x^2}{1-\cos x}\,dx = 2\int x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,dx - x^2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, és így

$$\frac{x^2}{1-\cos x} \sim \frac{d}{dx}\left\{4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{B_{2k}}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} - 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{B_{2k}}{(2k)!}\,x^{2k+1}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2\,(2k-1)\,B_{2k}}{(2k)!}\,x^{2k}.$$

b) A 4. § *b) η)* 18. feladatban közölt relációból, $f(x) = \mathrm{sh}\,x$ választással:

$$\frac{1}{\mathrm{ch}\,x} \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_{2n}}{(2n)!}\,x^{2n}.$$

c) Először az $\ln \frac{z}{\sin z}$ függvény *Mac Laurin*-sorát határozzuk meg, mert abból a $z = \frac{x}{2}$ helyettesítéssel adódik a keresett sor.

$$\frac{d}{dz} \ln \frac{z}{\sin z} = \frac{1}{z}(1 - z \operatorname{ctg} z), \quad \text{így} \quad \ln \frac{x}{2 \sin \frac{x}{2}} \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}}{2k(2k)!} x^{2k}.$$

22. *a)* $$\frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{th} \frac{x}{2}\right), \quad \text{és így} \quad \frac{1}{e^x+1} \sim \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{2k}-1) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}.$$

b) $$\frac{e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1} \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{2k}-1) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}.$$

c) $$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = -\frac{d}{dx} \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad \text{és így} \quad \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{2n}}{(2n-1)!} x^{2n-1}.$$

FELHASZNÁLT ÉS AJÁNLOTT IRODALOM

A csak a témakörrel foglalkozó könyvek közül a következőket emeljük ki:

K. Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 1950. Berlin–Springer.

C. Runge: Theorie und Praxis der Reihen. 1904. Leipzig.

T. J. L' A. Bromwich: An introduction to the theory of infinite series. 1908. London.

N. Nielsen: Lehrbuch der unendlichen Reihen. 1909. Leipzig.

Azon könyvek közül, amelyeknek csak egyes fejezetei foglalkoznak a témakörrel, az alábbiakat említjük:

Szász Pál: Differenciál és integrálszámítás I–II. Bp. 1951. Közoktatási K.

A. F. Bermant: Matematikai analízis I–II. Bp. 1951. Tankönyvkiadó.

Alexits Gy.–Fenyő I.: Matematika vegyészek számára. Bp. 1951. Tankönyvkiadó.

Műszaki Matematikai Gyakorlatok A. II. köt. Bp. 1953. Tankönyvkiadó.

M. K. Grebencsa–Sz. I. Novoszelov: Matematikai analízis I–II. Bp. 1951–1953. Tankönyvkiadó.

Goursat: Cours d'analyse. Paris, 1927. Gauthiers-Villars.

Gjunter–Kuzmin: Felsőbb matematikai példatár. I–III. Bp. 1951–52. Tankönyvkiadó.

Beke Manó: Differenciál- és integrálszámítás. I–II. Bp. 1916.

A kiadásért felelős a Tankönyvkiadó igazgatója
Felelős szerkesztő: Ambrus Ferenc
Műszaki vezető: Hámori József
Műszaki szerkesztő: Szabados József
A kézirat nyomdába érkezett: 1974. november — Megjelent: 1976. január
Példányszám: 1000 — Terjedelem: 23,45 (A/5) ív
Készült: az 1965. évi harmadik kiadás alapján, monószedéssel, íves magasnyomással,
az MSZ 5601—59 és az MSZ 5602—55 szabvány szerint
Raktári szám: 44 131/VIII
75.1605 — Állami Nyomda, Budapest